MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

A. IV.
HATÁROZATLAN INTEGRÁL

ÍRTA:
DR. FAZEKAS FERENC

NEGYEDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS



BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FRÉY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS



SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1968

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Második kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Második kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Negyedik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Második kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Második kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Második kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Harmadik kiadás)
A. X. A logarléc (Negyedik kiadás)

B.

B. I., II., III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Második kiadás)
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Harmadik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás (Második kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Második kiadás)
C. IV. Mátrixszámítás (Harmadik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Második kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk)

A. IV.

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

ÍRTA:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

NEGYEDIK KIADÁS

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

KIADÁSÁT A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER RENDELTE EL

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

DR. GALLAI TIBOR
V. EGYETEMI TANÁR

DR. MAKAI ENDRE
V. EGYETEMI DOCENS

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2 – 3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt – magas színvonalára való tekintettel – elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben dr. *Alexits* akadémikus, professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével – egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet*

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E, példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzorainak helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk: olykor e sorrendtől is eltérünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* – az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva – nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem – példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő – eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus, professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1. *A szerkesztő*

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával – néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve – az eredeti terv szerint sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi nemzetközi mérnöki matematikai kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének a – megalkotásánál semmivel sem könnyebb – munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1. *A szerkesztő*

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. I – II – III., B. IV., B. VII.

Az utóbbi második kiadások fél éven belüli elfogyása – éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével, ill. a héjelmélet modern tenzorszámítási tárgyalásmódjával kapcsolatos bővítés után – kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk, vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a Minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban a műszaki olvasótáborunk további buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. február 15.

A szerkesztő

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

Az alábbi hat §-ban a határozatlan integrálás elemeit ismertetem, mintegy 1000 példán keresztül.

Szakaszonként (*a, b, c* stb.) rövid elméleti összefoglaló és néhány részletesen, majd vázlatosan, magyarázat kíséretében megoldott mintapélda könnyíti meg az olvasónak az utánuk következő nagyszámú gyakorló feladat megoldását. Sok esetben még az eredménytárban is elhelyeztem útbaigazításokat a kezdő olvasó részére. Az eddig említett anyag zöme műszaki egyetemeinken oktatási anyagul szolgálhat.

Az igényesebb hallgató és olvasó szép számmal talál a gyakorló feladatok után *-gal megjelölt nehezebb, fogásokat igénylő példákat, jórészt útmutatással ellátva. A §-ok végén számos műszaki és fizikai vonatkozású (legnagyobbrészt megoldott) példa érzékelteti az integrálszámítás fontosságát a mérnök és a felsőbbéves hallgató számára.

Ki kell emelni, hogy (a sorozat második, de nem mellékes céljának megfelelően) van a kötetnek több olyan *-os szakasza (*a, b, c* ... stb.), ill. pontja (α, β, γ ... stb.), amely már meghaladja a műegyetemi oktatási anyagot. Ezekben, főleg az 5. és 6. §-beliekben már nem ragaszkodtam az előbb ismertetett rendszerhez. Ugyancsak a második cél magyarázza néhány fontos formula beiktatását.

A tájékozott olvasónak fel fog tűnni a példaanyag gazdagsága, változatossága, igényessége. A példaanyagot nagyszámú, főleg szovjet forrásból gyűjtöttem, továbbá saját és több tanszéki gyűjteményből válogattam össze. A sok forrás közül (lásd hátul az irodalomjegyzékben) kiemelem *Fihtengolc* idézett ragyogó művét; örömest alapoztam erre munkámat. Sokat merítettem *Berman* gazdag példatárából is. Megemlítem még *Demidovics* és *Pogorelov* új példatárát; ezek és mások is igazolják sorozatunk szerkesztési elveinek korszerűségét.

Nagy gondot fordítottam a hatalmas példaanyag osztályozására, csoportosítására. Tapasztalatom szerint ugyanis a kezdőnek főleg azért nehéz az integrálszámítás elsajátítása, mert nem szerez kellő áttekintést a legfontosabb módszerekről, típusokról, s így az integrálszámítás számára a legkülönbözőbb példák összefüggéstelen sokaságának tűnik. Ezt az áttekintést igyekeztem megadni a nagymértékű (s talán itt-ott erőltetett) osztályozással, továbbá a részletes tartalomjegyzékkel.

Köszönetemet fejezem ki *Gallai* professzornak, aki sok megjegyzéssel és tanáccsal segítette elő, hogy a kötet első célkitűzésének minél jobban megfeleljen. Hasonló segítségéért tartozom köszönettel *Makay* docensnek is.

Köszönet illeti az *Egyetemi Nyomdát*, főleg a *Juhász-brigád* dolgozóit, akik lelkes és színvonalas munkával valósították meg a kötet magas nyomdai követelményeit.

A szerző

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

A kötet első kiadása kb. 10 évvel ezelőtt jelent meg, viszonylag magas (5000) példányszámban. Most, amikor az első kiadás elfogyott, az évtizedes oktatási felhasználás tapasztalatai alapján, valamint a hiány mielőbbi pótlása érdekében célszerűnek látszott – néhány apróbb hibaigazítástól eltekintve – változatlanul, az első kiadás matricájáról nyomatni a második kiadást.

Örömömre szolgál, hogy a második kiadás révén a műszaki olvasók újabb ezreivel ismertethetem és remélhetőleg kedveltethetem meg e, számukra nélkülözhetetlen matematikai diszciplínát.

Budapest, 1963. febr. 15.

A szerző

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK ÉS NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A kötet második kiadása 1963 augusztusában jelent meg és 1964 februárjára el is fogyott. Ugyancsak hamar elkelt a Vektoralgebra, a Komplex függvénytan és a Vektoranalízis második kiadása.

Nem kis öröm a szerzőnek, hogy a magyar műszaki olvasótábor igényli könyveit, s rajtuk keresztül hozzájárulhat a hazai műszaki élet elméleti színvonalának emeléséhez.

A Határozatlan integrál harmadik és negyedik kiadása megegyezik a másodikkal.

Budapest, 1967. ápr. 15.

A szerző

TARTALOMJEGYZÉK

ELSŐ RÉSZ

A HATÁROZATLAN INTEGRÁLRÓL ÁLTALÁBAN

MÁSODIK RÉSZ

A HATÁROZATLAN INTEGRÁLÁS ALAPMÓDSZEREI

HARMADIK RÉSZ

RACIONÁLIS ÉS RACIONALIZÁLHATÓ INTEGRÁLOK

ELSŐ RÉSZ

A HATÁROZATLAN INTEGRÁLRÓL ÁLTALÁBAN

1. §. A HATÁROZATLAN INTEGRÁL FOGALMA, SAJÁTSÁGAI. ALAPINTEGRÁLOK. EGYSZERŰBB INTEGRÁLÁSI SZABÁLYOK

a) A határozatlan integrál bevezetése, fogalma, geometriai vonatkozásai

α) Bevezetés

Számos műszaki és természettudományi problémánál előfordul, hogy *keresni kell azon függvényeket, amelyek deriváltja egy adott függvény*. Ilyen feladat pl. az adott $a = a(t)$ gyorsulás-idő függvény alapján a $v = v(t)$ sebesség-idő, majd $s = s(t)$ út-idő függvények meghatározása.

A differenciálszámítás fordított műveletével, az ún. **határozatlan integrálással** állapítjuk meg a kérdéses, ún. primitív függvényeket, deriváltjukból! (Megjegyzendő, hogy e primitív függvények akárhányszor nem állíthatók elő az elemi függvényekből, a 4 alapművelet végesszámú alkalmazásával; sőt nem is léteznek feltétlenül.)

Az alábbi 6 paragrafusban a legfontosabb integrálási módszerekkel és a legfőbb, elemi úton integrálható függvénytípusokkal ismerkedünk meg.

β) A primitív függvény fogalma, sajátságai

Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ **primitív függvényé***nek mondjuk, ha*

$$F(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \text{vagy} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

[Az $F(x)$ mindig egy szakaszra vonatkozik, amelyben $f(x)$-szel együtt értelmezve van, és ahol $F'(x) = f(x)$.]

Ha $F(x)$ *az* $f(x)$ *primitív függvénye, akkor az* $F(x)+C$ *alakú függvények is azok*, mivel $[F(x)+C]' = f(x)$; a C tetszőleges állandó. Ezen $y = F(x)+C$ függvénysereget, amely egyszersmind az $f(x)$ összes primitív függvényét tartalmazza, az $f(x)$ függvény **határozatlan integrál**jának nevezzük, és így jelöljük:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = y.$$

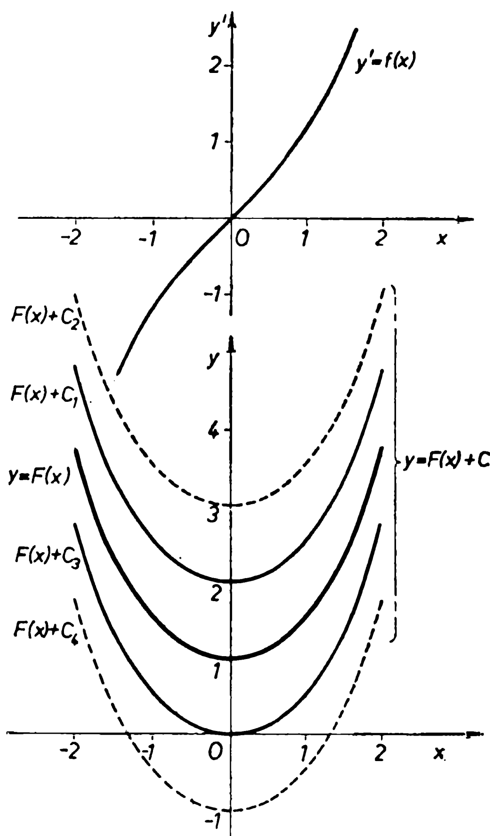
γ) Geometriai vonatkozások

γ_1) Az $y_1 = F(x)$ primitív függvény görbéje egy ún. **integrálgörbe**; az $y = F(x)+C$ összes primitív függvény görbéi együtt az *integrálgörbék seregét* alkotják. Ennek egyedei egymásból függélyes eltolással állíthatók elő, minthogy függvényeik csak a C additív állandó tekin-

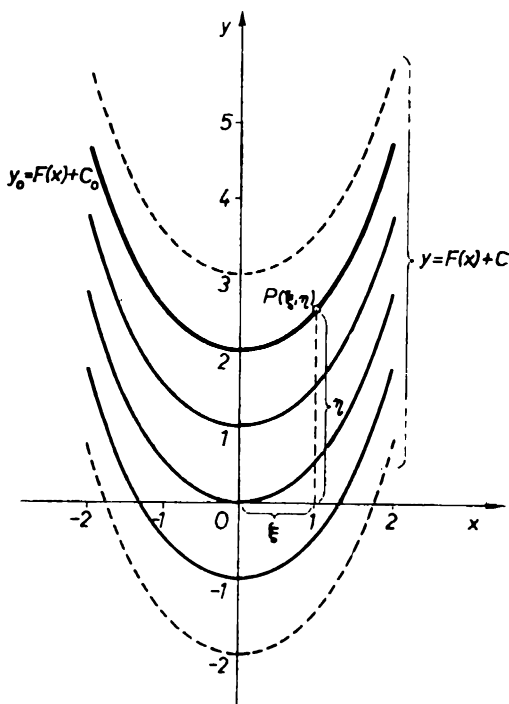
tetében térnek el egymástól. (L. az 1. ábrát.) Az integrálgörbék seregéből ún. *kezdeti feltétellel*, vagyis egy $P(\xi, \eta)$ ponton való áthaladás előírásával választunk ki *egy megfelelőt;* erre nézve az állandó értéke:

$$\eta = F(\xi) + C_0,$$

$$C_0 = \eta - F(\xi), \quad \text{amivel} \quad y_0 = F(x) + C_0. \qquad \text{(L. a 2. ábrát!)}$$



1. ábra



2. ábra

Ezen integrálgörbe-sereg a legegyszerűbb felépítésű az $F(x, y, C) = 0$ egyenletű ún. ***egyparaméteres görbeseregek*** között; itt C tetszőleges állandó (paraméter). Az ilyen görbesereg az ***érintő-iránytangenst mindenütt megadó,*** speciálisan $y' = f(x)$, általában pedig $y' = f(x, y)$ alakú (paraméter nélküli) ún. ***differenciálegyenlettel*** is jellemezhető! (L. ε_3! – L. az 5. ábrát!)

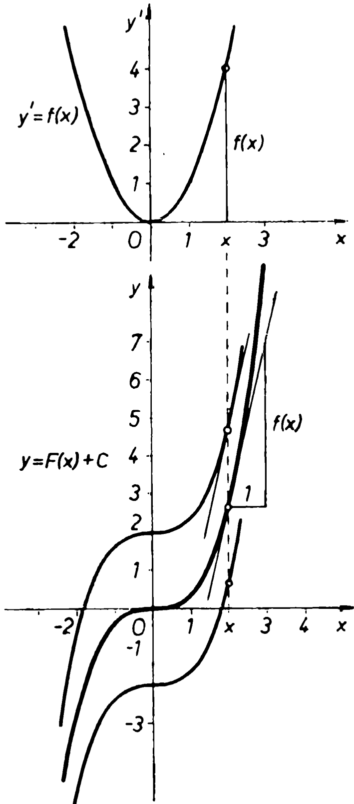
γ_2) Az $f(x)$ függvény $y = F(x) + C$ egyenletű[1] integrálgörbéi valamely x helyen az y-tól függetlenül ugyanazon $y' = f(x)$ iránytangensű **érintő**vel rendelkeznek!

Adott $y' = f(x)$ érintő-iránytangens (differenciálegyenlet) esetén tehát egyszerűen *határozatlan integrálással* jutunk az integrálgörbe-sereg $y = F(x) + C$ egyenletéhez. Számszerűen adott $y' = k$ iránytangensű érintő nyilván [az $f(x) = k$ egyenletből nyert $x = c_i$

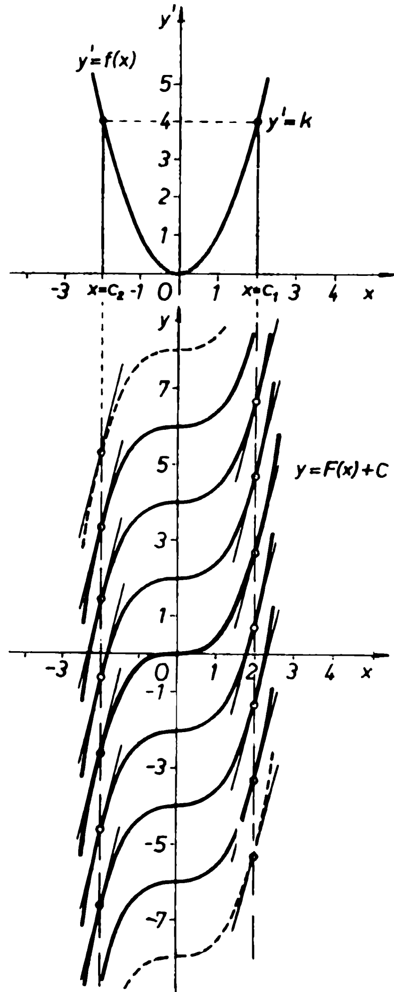
[1] Közismert szóhasználattal egy függvényt (függvénysereget) a megfelelő *görbe* (görbesereg) *egyenleté*nek nevezünk.

érték(ek) mellett, azaz] $x=c_i$ egyenletű egyenes(ek) és az integrálgörbe-sereg metszéspontjaiban tartozik az integrálgörbékhez. (L. a 3. és 4. ábrát!)

Általában az érintő-iránytangens $y'=f(x, y)$ alakú; e *differenciálegyenlet megoldása útján* jutunk az egyparaméteres görbesereg $F(x, y, C)=0$ egyenletéhez. (L. ε_3)!) – Számszerűen adott $y'=k$ iránytangensű érintő az $f(x, y)=k$ egyenletű görbe (ún. *izoklin görbe*)



3. *ábra*



4. *ábra*

és az $F(x, y, C)=0$ görbesereg metszéspontjaiban tartozik az utóbbi görbéihez (L. az 5. ábrát!)

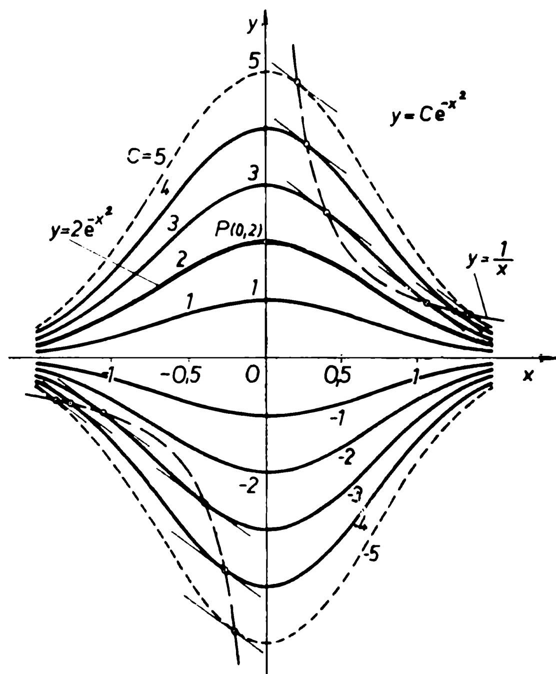
γ_3) *Newton* és *Leibniz* tétele értelmében, az $f(x)$ függvény görbéjének (a, x) szakasza alatti terület $T(a, x)$ mérőszámát éppen az $F(x)+C$ primitív függvények egyike szolgáltatja; ti. az, amelyre:

$$T(a, a)=0=F(a)+C_0,$$

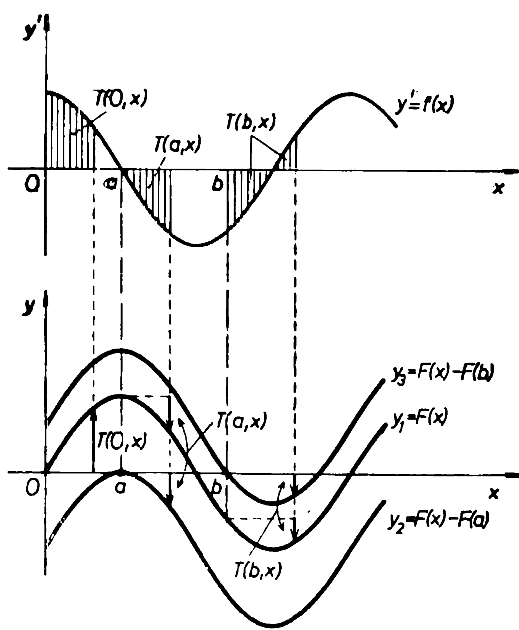
$$C_0=-F(a) \quad \text{és így:} \quad \mathbf{T(a, x)=F(x)-F(a)}.$$

E tétel alapján **területszámítást** végezhetünk, a határozott integrál fogalma, ill. az erre vezető téglányösszegezési elv nélkül! Ezzel egyszersmind az integrálszámítás alapkép-

letét is előre vetítettük. E tétellel számolva, az x-tengely feletti terület *pozitív*, az x-tengely alatti *negatív* mérőszámúnak adódik. Egy, x-tengely feletti és alatti részeket tartalmazó



5. *ábra*



6. *ábra*

terület mérőszámát így az egyes részek *előjeles mérőszámainak algebrai összegeként* nyerjük. Megjegyzendő, hogy a $T(a, x)$ mint hosszúsági mérőszám akár az $y_2=F(x)-F(a)$ görbe $y_2(x)$ ordinátájára, akár pedig (s ez a célszerűbb) az $y_1=F(x)$ görbe $y_1(x)$ és $y_1(a)$ ordinátáinak különbségére vonatkoztatható! (L. a 6. ábrát!)

δ) **Primitív függvény létezése**

Előrebocsátjuk a következő fontos tételt: egy (a, b) szakaszon *folytonos* függvénynek mindig van e szakaszon primitív függvénye.

ε) **Gyakorlati megjegyzések**

ε_1) A határozatlan integrálást a **műszaki és természettudományokban** *elsősorban határozott integrálok és differenciálegyenletek megoldásánál használják fel,* ezért mi is e célok szolgálatára kívánjuk előkészíteni, már e kötetben is! — Az evégett beiktatott határozott integrálok és egyszerű differenciálegyenletek kedvéért jelezzük előre a következőket:

ε_2) Newton—Leibniz tétele értelmében az $f(x)$ függvény (a, b) szakaszra vonatkozó

$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right.$ módon jelölt és $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ módon értelmezett$\left.\right]$ *határozott integ-*

rálját egy tetszőleges $F(x)+C$ primitív függvényével így számíthatjuk:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+C]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

(Lásd az A. V. kötetben!)

Ez **az integrálszámítás alapképlete.** Ennek ismeretében a γ_1) és γ_3) eredménye így jelölhető:

$$\int_\eta^{y_0} dy_0 = \int_\xi^x f(x)\,dx \quad \text{és} \quad T(a,x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

*ε_3) Az (ún. közönséges) **differenciálegyenlet**[1] egy ismeretlen függvénysereg, ennek deriváltjai és a független változó közötti, egyenlőség formájában megadott összefüggés.

Az ismeretlen függvénysereg és deriváltjai *azonosan,* azaz a független változó minden (szóba jöhető) értéke mellett tartoznak kielégíteni az egyenlőséget. Jelekkel a differenciálegyenlet:

$$G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0;$$

a keresett függvénysereg pedig:

$$F(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

A differenciálegyenletet megoldani annyit tesz, mint az említett *függvénysereget* megállapítani. Ez a differenciálegyenlet típusától függően a legkülönbözőbb módokon történik. (L. a B. V. kötetet!)

A műszaki és természettudományok *legegyszerűbb differenciálegyenletei*[2] akárhányszor az

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(x), \quad \text{vagy} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

alakban jelennek meg! A változókat, differenciáljaikkal[3] együtt

$$dy = \varphi(x)\,dx, \quad \text{vagy} \quad \psi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx$$

módon *szétválasztva,* mindkét oldal saját változója szerint határozatlanul integrálható:

$$\int dy = \int \varphi(x)\,dx, \quad y + C_1 = \Phi(x) + C_2, \quad y = \Phi(x) + C;$$

vagy

$$\int \psi(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx, \quad \Psi(y) + C_1 = \Phi(y) + C_2, \quad F(x, y, C) = 0.$$

Végül, kezdeti feltétellel, az *ismeretlen függvény* (explicit vagy implicit formában) teljesen meghatározható.

[1] L. bővebben a B. V. kötetben!
[2] Itt csupán egy-két típus bemutatásáról lehet szó! Lásd bővebben a B. V. kötetben!
[3] A *differenciál* értelmezését lásd az A. III. kötetben!

Elég gyakori az

$$y'' = g(x)$$

egyszerű differenciálegyenlet-típus is, amely két, egymást követő határozatlan integrálással oldható meg, így:

$$y' = \int g(x)\,dx = G(x) + C_1; \qquad y = \int [G(x) + C_1]\,dx = \int G(x)\,dx + C_1 x + C_2.$$

Az alábbi egyszerű példák és feladatok során *igyekezzünk jól megérteni a határozatlan integrál fogalmát és geometriai vonatkozásait,* egyelőre az integrálási módszerek ismerete nélkül, lehetőleg az alapintegrálok táblázatát is mellőzve! (Az utóbbit szükség esetén lásd a 34. oldalon!)

Példák és feladatok

$\beta-\varepsilon$ β_1) **1.** Igazoljuk, hogy az $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ függvény az $f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$ függvény *egyik primitív* függvénye, az $F(x) + C = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ függvénysereg pedig az $f(x)$ *határozatlan integrálja!*

Az $F(x)$-et differenciálva nyerjük:

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2} = f(x),$$

tehát $F(x)$ valóban egyik primitívje $f(x)$-nek, az $F(x)+C$ pedig az $f(x)$ (összes primitív függvényét felölelő) határozatlan integrálja!

Hasonló igazolást végezzünk az alábbi feladatoknál!

2. $F(x) = \operatorname{arc\,tg}\sin x,$

$f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$

3. $F(x) = \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right),$

$f(x) = \frac{1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{1}{x}.$

4. $F(x) = \frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right),$

$f(x) = x^3 \ln^2 x.$

5. $F(x) = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2},$

$f(x) = \frac{1}{\sin x}.$

6. A β)-beli definíció alapján állapítsuk meg az $f(x) = \cos x$ függvény *határozatlan* integrálját (összes primitív függvényét) és írjuk fel néhány *határozott* primitív függvényét!

Az említett definíció értelmében az $f(x)=\cos x$ *összes* primitívje: $y=F(x)+C=$ $=\sin x+C$, mert $y'=[F(x)+C]'=[\sin x+C]'=\cos x$. *Egyes* primitív függvényei tehát pl.: $y_1=\sin x$, $y_2=\sin x+1$, $y_3=\sin x-3$, $y_4=\sin x+\pi$ stb.

Hasonló a feladatunk az alábbi $f(x)$ függvényekkel kapcsolatban!

7. $f(x)=-\sin x$

8. $f(x)=2x$

9. $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$

10. $f(u)=\dfrac{1}{\cos^2 u}$

11. $f(v)=\dfrac{1}{v}$

12. $f(x)=e^x$

13. $f(x)=\operatorname{ctg} x$

14. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

γ_1) **15.** Írjuk fel az $f(x)=\cos x$ függvény összes, ill. néhány határozott primitív függvényét, majd *szemléltessük* a hozzájuk tartozó integrálgörbe-sereget, ill. integrálgörbéket.

A 6. példa szerint $f(x)$ összes primitívje:

$y=F(x)+C=\sin x+C$; egyes primitívjei pl.:

$y_1=F(x)+C_1=\sin x$, $\quad y_2=F(x)+C_2=\sin x+1$,

$y_3=F(x)+C_3=\sin x-3$, $\quad y_4=F(x)+C_4=\sin x+\pi$ stb.

Mindezek görbéi az $y_1=\sin x$ görbéjének *függélyes* irányú, tetszőleges, ill. határozott mértékű *eltolásával* állíthatók elő. (Lásd a 7. ábrát!)

Hasonló a feladatunk az alábbi $f(x)$ függvényekkel kapcsolatban!

16. $f(x)=2x$ (Hátul ábra!)

17. $f(x)=e^x$ (Hátul ábra!)

18. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (Hátul ábra!)

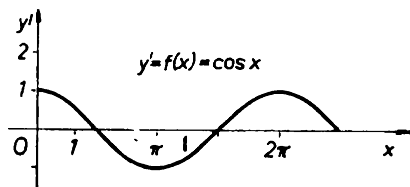
19. $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

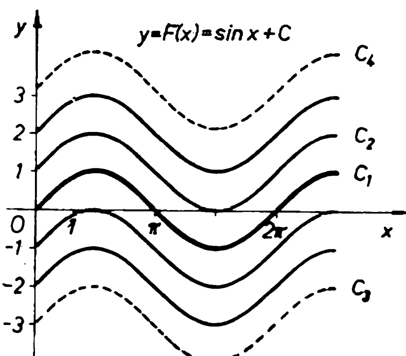
20. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

21. $f(x)=-2\sin 2x$

22. $f(n)=\operatorname{sh} u$

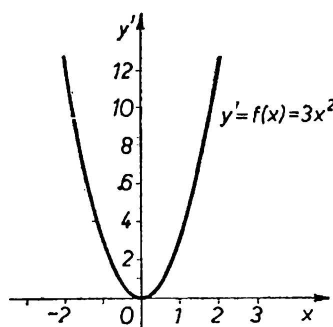
23. $f(v)=\dfrac{1}{1-v^2}$, $|v|<1$.





7. ábra

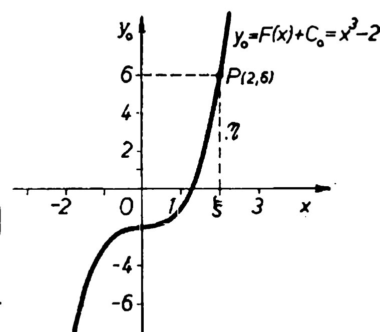
γ_1), ε_2) 24. Keressük az $f(x)=3x^2$ függvény azon primitív függvényét, amelynek görbéje illeszkedik a $P(2, 6)$ pontra.



Az összes primitív függvény: $y=F(x)+C=$ $=x^3+C$, mert $(x^3+C)'=3x^2$. A keresett primitív függvény C_0 állandója a γ_1) szerint: $C_0=\eta-F(\xi)=$ $=6-2^3=-2$, tehát maga a keresett primitív függvény: $y_0=F(x)+C_0=x^3-2$. A 8. ábrán szemléltettük az eredményt! Ugyanezt az ε_2) szerint így is nyerhetjük:

$$\int_6^{y_0} dy_0=[y_0]_6^{y_0}=y_0-6=$$

$$=\int_2^x 3x^2\,dx=[x^3]_2^x=x^3-8.$$



8. ábra

25. Keressük az egyenletét az $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ függvény azon integrálgörbéjének, amely átmegy a $P\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ponton.

Esetünkben $y=F(x)+C=\operatorname{arc\,tg} x+C$. A kérdéses állandó: $C_0=\eta-F(\xi)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} 1=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$. Ezzel a keresett integrálgörbe egyenlete: $y_0=F(x)+$ $+C_0=\operatorname{arc\,tg} x+\dfrac{\pi}{4}$. – Ábrázoljuk az integrálgörbe-sereget, kiemelve a most meghatározott integrálgörbét!

Megjegyzendő, hogy az y_0-t nyerhetjük még az ε_2) szerint is,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{y_0} dy_0=y_0-\frac{\pi}{2}=\int_1^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x-\frac{\pi}{4}$$

módon.

*26. Hasonló a feladatunk $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ és $P(1, 1)$ esetén!

Ez esetben $f(x)=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+1}$ határozatlan integrálja nyilván $F(x)+$ $+C=x-\operatorname{arc\,tg} x+C$. A keresett állandó: $C_0=\eta-F(\xi)=1-\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, amellyel végül: $y_0=F(x)+C_0=x-\operatorname{arc\,tg} x+\dfrac{\pi}{4}$.

A 24—26. példabeliekhez hasonlók a teendők az alábbi példáknál!

27. $f(x)=\frac{1}{x}$; a) $P(1, 0)$, b) $P(1, 2)$, c) $P(e, -1)$. (Hátul ábra!)

28. $f(x)=-\operatorname{sh} x$; a) $P(0, 1)$, b) $P(0, 3)$, c) $P(0, -2)$. (Hátul ábra!)

29. $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; a) $P(0, 0)$, b) $P(0, 1)$, c) $P(0, -3)$. (Hátul ábra!)

30. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; a) $P(\pi, 1)$, b) $P(2\pi, -3)$, c) $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+4\right)$.

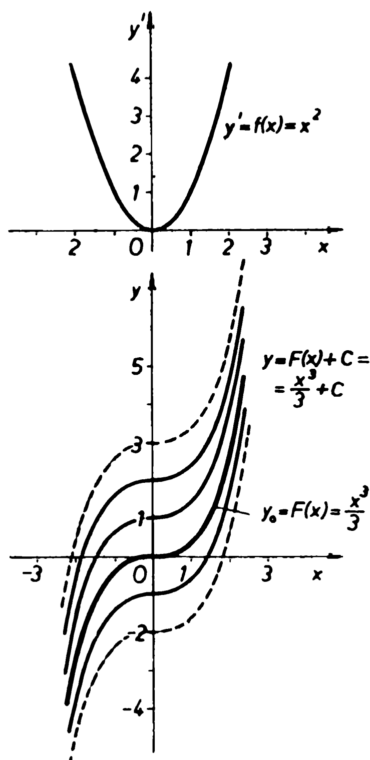
31. $f(x)=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$, a) $P\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, b) $P(\pi, -2)$.

γ_2), ε_3) **32.** Keressük azon görbesereg $y=F(x)+C$ egyenletét, amelynek görbéihez vont érintő iránytangense, tetszőleges x helyen $y'=f(x)=x^2$.

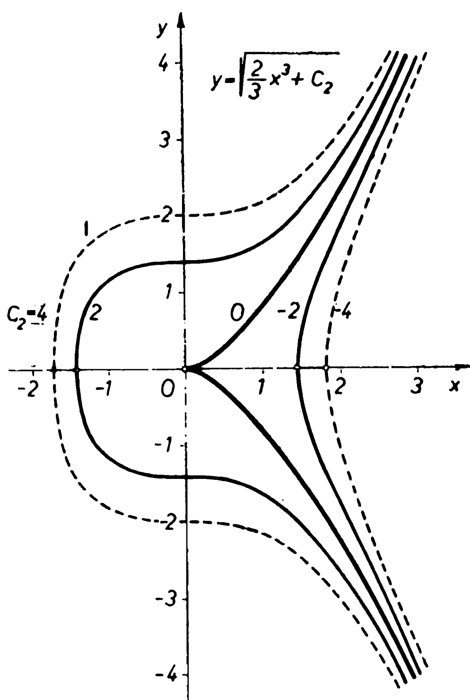
A y_2) szerint e görbesereg egyenlete éppen $f(x)$ határozatlan integrálja, vagyis

$$y=F(x)+C=\int f(x)\,dx=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

(L. a 9. ábrát!)



9. *ábra*



10. *ábra*

*33. Hasonló a feladatunk $f(x)=\frac{x^2}{F(x, C)}$, azaz (egyszerűbb jelölésekkel) $y'=\frac{x^2}{y}$ esetén![1]

Az ε_3) szerint járunk el, az $y=F(x, C)$ meghatározása céljából.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}. \quad \text{Szétválasztva:} \quad y\,dy=x^2\,dx.$$

Integrálva: $\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{3}x^3+C_1$, azaz $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+C_2}$. (L. a 10. ábrát!)

A C_2 itt láthatóan *nem* eltolási állandó!

Hasonló a feladat az alábbi esetekben!

34. $y'=\frac{1}{x-1}$ (Hátul ábra!)

35. $y'=\frac{1}{x^2+1}$ (Hátul ábra!)

36. $y'=\operatorname{ctg} x$

*39. $y'=\frac{-x}{y}$ (Hátul ábra!)

*37. $y'=-\frac{y}{x}$ (Hátul ábra!)

*40. $y'=\frac{x}{y^2}$ (Hátul ábra!)

*38. $y'=\frac{b^2x}{a^2y}$

*41. $y'=\frac{1+x}{1-y}$

γ_2), ε_2), ε_3) 42. Keressük azon görbe $y=F(x)+C_0$ egyenletét, amelynek érintője x helyen $y'=f(x)=2x$ iránytangensű, s amely átmegy a $P(0, 5)$ ponton! (L. a 11. ábrát!)

Az $y'=f(x)=2x$ érintő-iránytangensű görbesereg $y=F(x)+C=\int f(x)\,dx=$ $=\int 2x\,dx=x^2+C$ egyenletű. Ezek közül a $C_0=\eta-F(\xi)=5-0=5$ állandójú, azaz $y_0=x^2+5$ egyenletű görbe a keresett.

43. Hasonló a feladatunk $f(x)=3x^2$ és $P(0, 0)$ esetén! Végezzünk érintőszerkesztést a keresett integrálgörbe $x_1=1$ abszcisszájú pontjában! (L. a 12. ábrát!)

Ekkor az ε_2) szerint:

$$\int_0^{y_0} dy_0=y_0=\int_0^x 3x^2\,dx=x^3.$$

Az érintőszerkesztést a $P[x_1, y_0(x_1)]=P(1,1)$ pontban $y'(1)=f(1)=3$ iránytangenssel végezzük!

*44. Keressük azon görbe egyenletét, amelynek érintője x-nél $y'=4y$ iránytangensű és amely illeszkedik a $P(1, 1)$ pontra!

Az ε_3) szerint járunk el:

$$\frac{dy}{dx}=4y, \qquad \int\frac{dy}{y}=4\int dx, \qquad \ln y=4x+C.$$

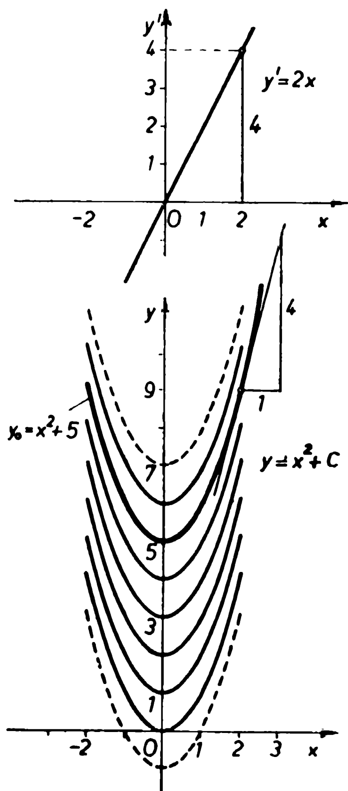
[1] Az alábbiakban előforduló egyszerű differenciálegyenletek tanulmányozása itt elhagyható! (L. a B. V. kötetben!)

A C_0 meghatározása: $\ln 1 = 4\cdot 1 + C_0$, ahonnan: $C_0 = -4$ és ezzel $\ln y_0 = 4x - 4$, azaz $y_0 = e^{4(x-1)}$.

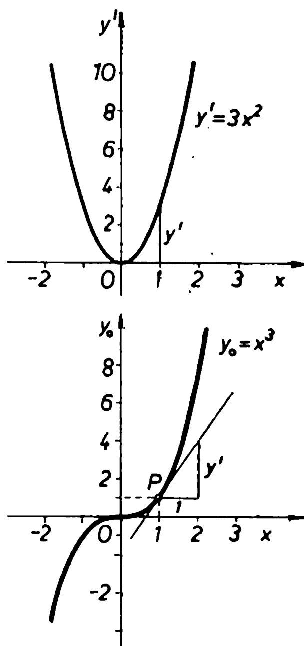
Vagy az ε_2) szerint:

$$\int_1^{y_0} \frac{dy_0}{y_0} = \ln y_0 = 4\int_1^x dx = 4(x-1).$$

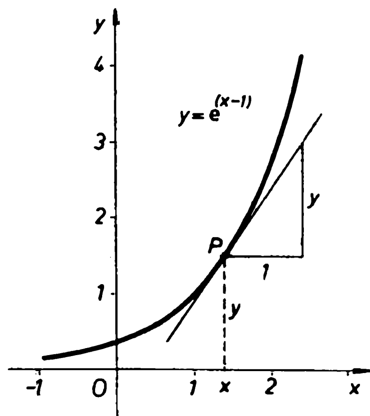
(L. a 13. ábrát!)



11. ábra



12. ábra



13. ábra

***45.** Keressük az $y'' = x$ differenciálegyenletű, az $\xi = 3$ helyen $\eta = 0$ ordinátájú és ott $\eta' = \frac{7}{2}$ érintőirány-tangensű integrálgörbe egyenletét!

Itt $y' = \int y''\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1$

és

$$y = \int y'\,dx = \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

A kezdeti feltételek szerint:

$\eta' = y'(3) = \frac{3^2}{2} + C_1 = \frac{7}{2}$, ahonnan $C_1 = -\frac{2}{2} = -1$, továbbá $\eta = y(3) = \frac{3^3}{6} - 1\cdot 3 + C_2 = 0$,

ahonnan $C_2 = 3 - \frac{27}{6} = 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$. Tehát a szóban forgó integrálgörbe egyenlete:

$y_0 = \frac{x^3}{6} - x - \frac{3}{2}$. (L. a 14. ábrát!)

Feleljünk a 42–45. példabeliekhez hasonló kérdésekre, az alábbi adatok mellett!

46. $y = 2x$, $P(3, 1)$
(Hátul ábra!)

47. $y' = 2x + 1$, $y_0(1) = 7$;
$y_0(3) = ?$

48. $y' = -xy$, $P(0, 2)$.
(Hátul ábra!)

*49. $y' = \frac{h - x}{y - k}$, $P(0, 0)$.
(Hátul ábra!)

50. $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$, $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

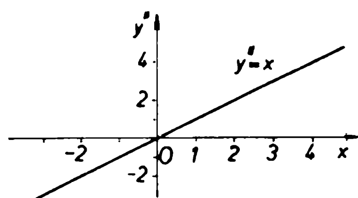
*51. $y' = \frac{x + 1}{y + 1}$, $P(0, 1)$.

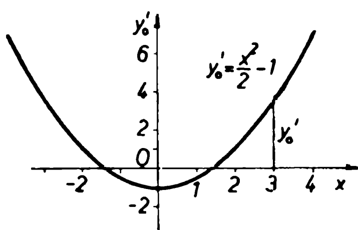
*52. $y' = \frac{y}{x^2}$, $P(1, 1)$.

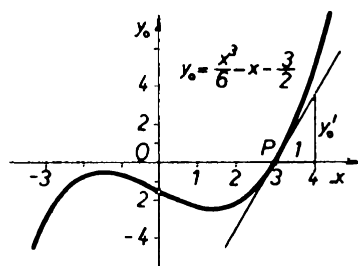
53. $y' = \sqrt{2px}$, $y_0\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{3}$;
$y_0(2p) = ?$

*54. $y'' = \frac{-1}{x^2}$; az y_0 görbéje átmegy a $P(1, 0)$ ponton, 135°-os hajlásszöggel. Útmutatás hátul!

*55. $y'' = \frac{12}{x^3}$, $y_0(1) = 0$,
$y_0'(1) = -6$.







14. ábra

γ_2), ε_2), ε_3) 56. Keresendő azon állandó $2a$ szubnormálisú görbe, amelyik átmegy az origón! (L. a 15. ábrát!)

A keresett $y_0 = F(x) + C_0$ egyenletű görbe x-abszcisszájú P pontjában az érintő iránytangense: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$, a normálisé pedig $\operatorname{tg} \psi = -\frac{1}{dy/dx}$. Az utóbbit, az ábra alapján az y ordináta és a $P'N = 2a$ szubnormálissal kifejezve, írhatjuk [$\operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg}(\pi - \psi)$ lévén]:

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{y}{2a}.$$

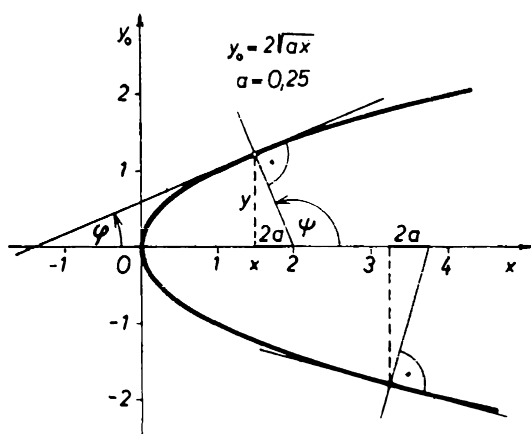
Szétválasztjuk és integráljuk:

$$\int y\,dy = 2a\int dx, \quad \frac{y^2}{2} = 2ax + C, \quad y = \sqrt{4ax + k}\,.$$

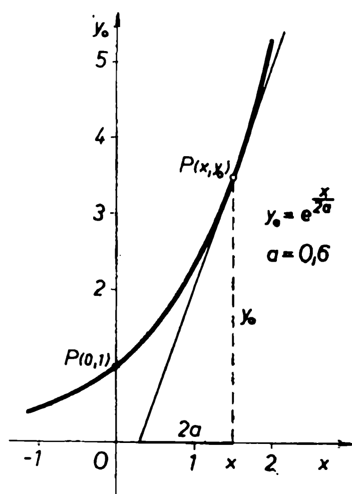
Az $y_0(0) = 0 = \sqrt{4a \cdot 0 + k_0}$ szerint $k_0 = 0$, tehát $y_0 = 2\sqrt{ax}$. Egyszerűbb

$$\int\limits_0^{y_0} y_0\,dy_0 = \frac{y_0^2}{2} = 2a\int\limits_0^{x} dx = 2ax$$

módon eljárni!



15. ábra



16. ábra

***57.** Keressük azon állandó $2a$ szubtangensű görbét, amely átmegy a $P(0, 1)$ ponton! (L. a 16. ábrát!)

Útmutatás. Fejezzük ki a P-beli érintő iránytangensét az y ordináta és a $\overline{TP'} = 2a$ szubtangens segítségével! (L. hátul!)

***58.** Keresendő azon görbe, amelynek szubnormálisa egyenlő az érintési pont abszcisszájával s amely átmegy a $P(0, 1)$ ponton! (L. hátul az útmutatást és az ábrát!)

***59.** Keresendő azon görbe, amelynek normálisa állandó R hosszúságú, s amely illeszkedik a $P(0, R)$ pontra! (L. hátul az ábrát és az útmutatást!)

γ_3) ε_2) **60.** Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéje alatti területet általában az (a, x), majd a $(0, 2)$ és $(2, 3)$ szakaszokon!

Az elmélet szerint a kérdezett területi mérőszámok az $y' = f(x)$ függvény $T(a, x) = F(x) - F(a)$ primitívje segítségével számíthatók. Esetünkben $F(x) = \frac{x^3}{3}$ és $F(a) = \frac{a^3}{3}$ felhasználásával írható:

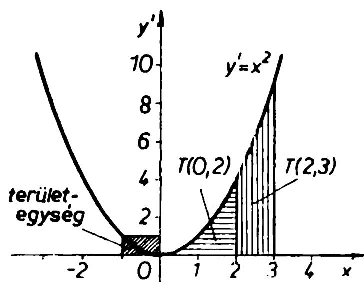
$$y_0 = T(a, x) = \frac{1}{3}(x^3 - a^3).$$

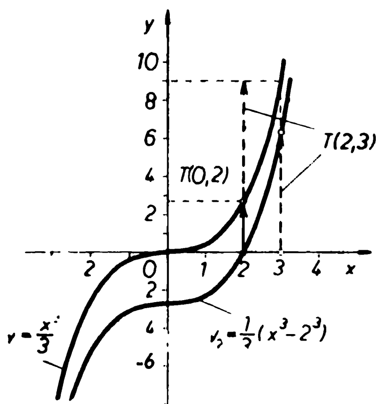
Ezzel a másik két primitív függvény:

$$y_1 = T(0, x) = \frac{1}{3}(x^3 - 0^3) = \frac{1}{3}x^3 \quad \text{és} \quad y_2 = T(2, x) = \frac{1}{3}(x^3 - 2^3).$$

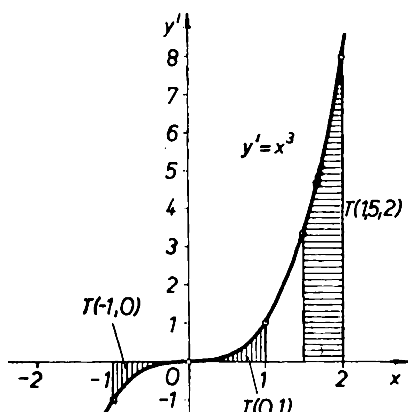
Velük a keresett területi mérőszámok:

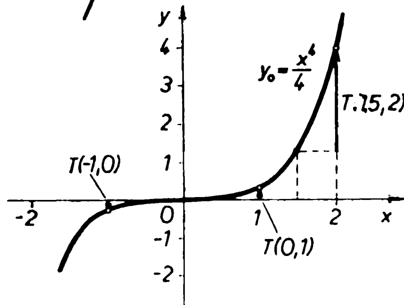
$$T(0, 2) = \frac{1}{3}2^3 = \frac{8}{3} \quad \text{és} \quad T(2, 3) = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3}.$$





17. *ábra*





18. *ábra*

A $T(0, x)$ és $T(2, x)$ függvények görbéjét ábrázolva (l. a 17. ábrát), a $T(0, 2)$ és $T(2, 3)$ számok, mint hossz-mérőszámok, leolvashatók az $x = 2$, ill. $x = 3$ abszcisszájú ordinátán. – A $T(2, x)$ görbéjének ábrázolása elhagyható, mert a $T(2, 3)$ érték a

$$T(2, 3) = T(0, 3) - T(0, 2)$$

értelmében, a $T(0, x)$ görbével is megállapítható, a $T(0, 3) - T(0, 2)$ ordináta-különbség hossz-mérőszámaként!

61. Határozzuk meg az $f(x) = x^3$ függvény görbéje alatti területet a $(0, 1)$, $(-1, 0)$ és $(1{,}5, 2)$ szakaszokon! Tüntessük fel ábrán a $T(0, 1)$, $T(-1, 1)$ és $T(1{,}5; 2)$ mérőszámú területeket és ordinátadarabokat! Használjuk az ε_2)-beli jelölést is!

Ez esetben $T(a, x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx = \int\limits_a^x x^3\,dx = \frac{1}{4}(x^4 - a^4)$, összhangban a γ_3)-mal és ε_2)-vel!

A kérdezett mérőszámok tehát:

$$T(0, 1) = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}, \qquad T(-1, 1) = \frac{1}{4}[0^4 - (-1)^4] = -\frac{1}{4},$$

$$T(1{,}5, 2) = \frac{1}{4}(2^4 - 1{,}5^4) = \frac{10{,}9375}{4} \approx 2{,}7344.$$

Az egyszerűség kedvéért csupán az $y_0 = T(0, x) = \frac{1}{4}x^4$ és az $f(x) = x^3$ görbéjét ábrázoltuk [mellőzve az $y_1 = T(-1, x)$ és $y_2 = T(1{,}5; x)$ görbéjét], megjelölve a $T(1{,}5; 2)$ mérőszámú területet és ordinátadarabot! Figyelemre méltó, hogy *az x-tengely alatti* $T(-1, 0)$ *terület negatív mérőszámú!* (L. a 18. ábrát!)

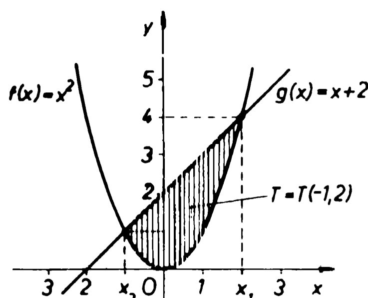
63. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ parabola és $g(x) = x + 2$ egyenes közötti terület mérőszámát! (L. a 19. ábrát!)

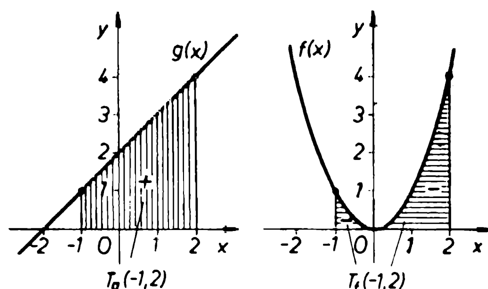
A két görbe metszéspontjainak abszcisszáit a (megfelelő ordináták egyenlőségét kifejező)

$$x^2 = x + 2, \qquad \text{azaz} \qquad x^2 - x - 2 = 0$$

2. fokú egyenlet gyökeiként nyerjük: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. A közbezárt terület [az ε_2)-beli jelöléssel is élve:]

$$T = T(-1, 2) = T_g(-1, 2) - T_f(-1, 2) =$$
$$= [G(2) - G(-1)] - [F(2) - F(-1)] =$$
$$= \int_1^2 g(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx,$$





19. ábra

azaz az egyenes alatti és a parabola alatti terület különbsége az $(-1, 2)$ szakaszon; itt $g(x) \geqq f(x)$. Lévén:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{és} \quad G(x) = \frac{x^2}{2} + 2x, \quad \text{velük}$$

$$G(2) - G(1) = \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right] = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}, \quad \text{továbbá}$$

$$F(2) - F(1) = \frac{1}{3}[(2)^3 - (-1)^3] = \frac{9}{3} = 3.$$

A keresett területi mérőszám tehát:

$$T(-1, 2) = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Végezzünk a 60 – 62. példabelihez hasonló számítást és ábrázolást a következő adatokkal!

63. $f(x) = \cos x, \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (0, \pi).$
(Hátul ábra!)

64. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (1, 2).$
(Hátul ábra!)

*65. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (-2, -1).$
(Hátul útmutatás és ábra!)

66. $f(x) = \operatorname{ch} x, \ (-1, 1).$
(Hátul ábra!)

*67. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (0, 1)$ és $(-a, a)$, ha $a \to \infty$.
(Hátul útmutatás és ábra!)

68. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right).$
(Hátul ábra!)

69. $f(x) = \cos 2x, \quad \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$

70. $f(x) = \sin \frac{x}{2}, \quad (0, 2\pi).$

*71. $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x+4}}, \quad (0, 5).$
(L. hátul!)

72. $f(x) = \frac{1}{x}$ és $g(x) = \frac{1}{2} - x$
görbék közti terület? (L. hátul!)

73. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x$
görbék közti terület?

74. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}.$
(Hátul ábra!)

75. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{2}{\pi} x.$
(Hátul ábra!)

76. $f(x) = x^4, \quad g(x) = 3x^2 - 2.$
(Hátul ábra!)

77. $f(x) = x^3, \quad g(x) = 4x.$

78. $f(x) = x^4 + 4, \quad g(x) = 5x^2.$

ε_2) 79. Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ függvény (1, 4) szakaszra vonatkozó határozott integrálját, *az $f(x)$ tetszőleges primitív függvénye segítségével!*

$$\text{Esetünkben } F(x) + C = \int f(x)\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Az *integrálszámítás alapképlete* szerint:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_1^4 x^2\, dx = [F(x) + C]_a^b = \left[\frac{x^3}{3} + C\right]_1^4 =$$

$$= F(b) - F(a) = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

80. Oldjuk meg hasonló módon az $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ határozott integrált!

Ekkor $F(x)+C=\int \sin x \, dx = -\cos x + C$. Ezzel:

$$I=\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x + C\Big]_0^{\pi} = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1)+1=2.$$

81. Kiszámítandó $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$ a fenti módon!

$$I=\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{a} = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{1}{a}\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4a}.$$

A határozott és határozatlan integrál összefüggésének tudatosítása céljából *számítsuk ki a 79 – 81. példa módján az alábbi integrálokat!*

82. $\int_0^1 4x^3 \, dx = ?$

83. $\int_{-2}^{+2} x^5 \, dx = ?$

84. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx = ?$

85. $\int_0^5 \sqrt{x} \, dx = ?$

86. $\int_0^2 e^x \, dx = ?$

87. $\int_0^a \operatorname{ch} x \, dx = ?$

88. $\int_{-2}^0 \operatorname{sh} 3x \, dx = ?$

89. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = ?$

90. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

91. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x \, dx = ?$ (L. hátul!)

b) Alapintegrálok. Egyszerűbb integrálási szabályok

α) Alapintegrálok Ezek a megfelelő differenciálási formulák megfordításai. (Ellenőrizzük!) *Megtanulásuk nagyon kívánatos,* mert az összes integrálokat, különböző eljárásokkal, rájuk vezetjük vissza!

Az alapintegrálok táblázata:

$\alpha_1)$

1. $\int 0\,dx = C$

2. $\int 1\,dx = x + C$

3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C_1 = \ln x + \ln C = \ln Cx, \quad \text{ha} \quad x > 0;$

   $= \ln(-x) + C_1 = \ln(-x) + \ln C = \ln C(-x), \quad \text{ha} \quad x < 0$

$\alpha_2)$

5. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x + C_1 = \frac{\pi}{2} - \text{arc ctg}\, x + C_1 = -\text{arc ctg}\, x + C_2$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C_1 = \frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x + C_1 = -\text{arc cos}\, x + C_2$

7. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{ar th}\, x + C_1 = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C_1 = \ln C\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \text{ha} \quad x^2 < 1;$

   $= \text{ar cth}\, x + C_1 = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C_1 = \ln C\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad \text{ha} \quad x^2 > 1$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{ar sh}\, x + C_1 = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1 = \ln C(x + \sqrt{1+x^2})$

9. $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{ar ch}\, x + C_1 = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C_1 = \ln C(x \pm \sqrt{x^2-1})$

$\alpha_3)$

10. $\int e^x\,dx = e^x + C$

11. $\int a^x\,dx - \frac{a^x}{\ln a} + C$

12. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

13. $\int \cos x\,dx = +\sin x + C$

14. $\int \text{sh}\, x\,dx = \text{ch}\, x + C$

15. $\int \text{ch}\, x\,dx = \text{sh}\, x + C$

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\, x + C$

17. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = +\,\text{tg}\, x + C$

18. $\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\text{cth}\, x + C$

19. $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = +\text{th}\, x + C$

β) Egyszerűbb integrálási szabályok

Ezek szintén a megfelelő differenciálási szabályok megfordításával nyerhetők.

β_1) **Véges függvénysor** (azaz végesszámú függvény összege) *tagonként* integrálható:

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\ldots+\int f_n(x)\,dx.$$

(Végtelen függvénysorra, mint később látni fogjuk, ez általában nem igaz!)

β_2) Az integrálandó **konstans tényezője** kiemelhető az integráljel elé:

$$\int Cf(x)\,dx=C\int f(x)\,dx.$$

E két szabály összefoglalható így: *az integrálás lineáris függvényművelet*, azaz

$$\int [C_1f_1(x)+\ldots+C_nf_n(x)]\,dx=C_1\int f_1(x)\,dx+\ldots+C_n\int f_n(x)\,dx.$$

β_3) és β_4) A differenciálási láncszabály és a szorzat differenciálási képletének megfordítását, fontosságuk miatt, önálló alfejezetben tárgyaljuk.

Példák és feladatok

α

α_1) **1.** $\int x^4\,dx=?$ – A 3. *alapintegrál* szerint: $I=\frac{x^5}{5}+C$.

2. $\int \sqrt[3]{x}\,dx=?$ – Az $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ lévén, a 3. képlet értelmében:

$$I=\int x^{1/3}\,dx=\frac{x^{4/3}}{4/3}+C=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.$$

***3.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2\sqrt{x}}\,dx=?$ – Az integrálandó törtkitevős alakban:

$$f(x)=\frac{x^{1/3}}{x^2\cdot x^{1/2}}=\frac{x^{2/6}}{x^{12/6}\cdot x^{3/6}}=\frac{x^{2/6}}{x^{15/6}}=x^{-13/6}.$$

$$\text{Ezzel } I=\int x^{-13/6}\,dx=\frac{x^{-7/6}}{-7/6}+C=-\frac{6}{7x\sqrt[6]{x}}+C,$$

a 3. alapintegrál felhasználásával.

4. $\int x^5\,dx=?$

5. $\int \frac{dx}{x^2}=?$ (L. hátul!)

6. $\int \frac{dx}{x^4}=?$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=?$ (L. hátul!)

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=?$

9. $\int \sqrt{x^4}\,dx=?$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^3}} = ?$

*11. $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x^3 \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt{x}} dx = ?$

12. $\int_2^3 x^2\,dx = ?$ – Az $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{2} + C$ lévén,

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + C\right]_2^3 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{1}{3}(27-8) = \frac{19}{3},$$

az *a)* ε_2)-nek és a *b)* α_1)-nek megfelelően.

13. $\int_3^2 x^2\,dx = ?$

14. $\int_{-1}^{+1} x^3\,dx = ?$

15. $\int_1^e \frac{dx}{x} = ?$

*16. $\int_{-e}^{-1} \frac{dx}{x} = ?$ (L. hátul!)

α_2) 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = ?$ – Az ismert azonosság szerint

$(1-x)(1+x) = 1-x^2$, tehát a 6. alapintegrál szerint:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C.$$

18. $\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx.$ – Az integrálandót hozzuk közös nevezőre:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1+x+1-x}{2(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Tehát a 7. alapintegrál szerint: $I = \int \frac{dx}{1-x^2} = \text{ar th}\,x + C,$ feltéve, hogy $x^2 < 1.$

19. $\int \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx$ Hozzuk az integrálandót közös nevezőre! (L. hátul!)

20. $\int \frac{1}{1+x} e^{\text{ar th}\,x} \cdot dx = ?$ Írjuk be ar th x logaritmikus kifejezését! (L. hátul!)

21. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = ?$. 22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = ?$ 23. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dx}{1+x^2} = ?$

α_3) 24. $\int 2^x dx = ?$ – A 11. formula szerint: $I = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

25. $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = ?$ – Az integrálandót átalakítjuk: $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x.$

Tehát: $I = \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$ a 12. alapintegrál szerint.

26. $\int \frac{2\,dx}{\text{ch}\,2x+1} = ?$ – Az $\frac{\text{ch}\,2x+1}{2} = \text{ch}^2 x$ azonosság és a 19. képlet alapján:

$$I = \int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}\,x + C.$$

27. $\int \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)dx = ?$

28. $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x - 1} = ?$

29. $\int_0^1 10^x\,dx = ?$

*30. $\int \frac{\text{ch}^2 3x - \text{sh}^2 3x}{\text{sh}^2 x}\,dx = ?$

31. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = ?$

*32. $\int_1^3 (\cos^2 5x + \sin^2 5x)\,dx = ?$

β

33. $\int 5x\sqrt[3]{x}\,dx = ?$ – A 2. szabály szerint az állandót kiemeljük az integráljel elé:

$$I = 5\int x\sqrt[3]{x}\,dx = 5\int x^{4/3}\,dx = \frac{15}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C.$$

34. $\int \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}\,dx = ?$ – Az integrálandó számlálóját tagonként osztjuk az (egytagú) nevezővel; majd az 1. szabály szerint tagonként integrálunk:

$$I = \int (x^{3/2} + 5x^{-1/2})\,dx = \int x^{3/2}\,dx + 5\int x^{-1/2}\,dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 10\sqrt{x} + C.$$

A 2. tagból kiemeltük az állandót!

35. $\int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}\,dx = ?$ – A kijelölt osztást elvégezzük s a többtagú hányadost – az együtthatókat kiemelve – tagonként integráljuk:

$$I = \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int dx - \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x^2} = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln x + \frac{1}{x} + C.$$

36. $\int b \cos x\, dx = ?$

37. $\int (a \sin x + b \cos x)\, dx = ?$

38. $\int (ae^x + bx^n)\, dx = ?$

39. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x} = ?$

40. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = ?$

41. $\int 3{,}7x^{-2,1}\, dx = ?$

42. $\int \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = ?$ (L. hátul!)

43. $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right) dx = ?$

44. $\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx = ?$

45. $\int \frac{x^3 - 6x + 5}{x}\, dx = ?$

46. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)\, dx = ?$

47. $\int (2x^{-1,2} + 3x^{0,8} - 5x^{0,38})\, dx = ?$

48. $\int \frac{(x - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\, dx = ?$

49. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}\, dx = ?$

50. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\, dx = ?$

51. $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}}\, dx = ?$

52. $\int \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 4}\, dx = ?$

53. $\int 5a^x(e^x - a^{-x})\, dx = ?$

54. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x}\, dx = ?$

*55. $\int \frac{x^2}{1 + x^2}\, dx = ?$ (L. hátul!)

*56. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)}\, dx = ?$ (L. hátul!)

*57. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = ?$

*58. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = ?$

*59. $\int \frac{4\, dx}{\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2} = ?$

60. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}\, dx = ?$

61. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\, dx = ?$

*62. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx = ?$

*63. $\int (\arcsin x + \arccos x)\, dx = ?$

64. $\int_{-3}^{-2} (x^2 - x)\, dx = ?$

65. $\int_0^{1/2} \left(5x^4 + \frac{1}{2}\right) dx = ?$

66. $\int_0^1 \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x}}\, dx = ?$

67. $\int_0^a (a^2 x - x^3)\, dx = ?$

68. $\int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\, dx = ?$

69. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx = ?$

Műszaki alkalmazások

1. *Elektromos vezetékpár Watt-vesztesége**. Legyen L a vezeték hossza, I_0 a betáplált áram erőssége, x a vezetékpár tetszőleges helyének távolsága elejétől, I_x ugyanott az áramerősség.

Ez utóbbi nagysága: $I_x = I_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)$. A vezetékpár egy dx elemén a feszültségesés:

$$dE_x = 2\varrho \frac{dx}{q} \cdot I_x .$$

A *feszültségesés* a vezeték elejétől, tetszőleges x helyéig:

$$E_x = \frac{2\varrho}{q} \int_0^x I_x \cdot dx = 2I_0 \frac{\varrho}{q} \int_0^x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot dx = 2I_0 \frac{\varrho}{q} \left(x - \frac{x^2}{2L}\right);$$

a vezeték végéig:

$$E_L = 2I_0 \frac{\varrho}{q} \left(L - \frac{L^2}{2L}\right) = \varrho \frac{L}{q} \cdot I_0 .$$

Maga a *veszteség* az egész vezeték mentén:

$$W_L = \int_0^L I_x^2 \cdot dR_x = \int_0^L I_x \cdot dE_x = \frac{2\varrho}{q} \cdot I_0^2 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{2\varrho}{q} I_0^2 \left[-\frac{L}{3} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 \right]_0^L = \frac{2\varrho}{3} \cdot \frac{L}{q} \cdot I_0^2 ,$$

ahol a b. α) α_1) szerint végeztük az integrálást!

2. *A Newton-féle tömegvonzással szemben kifejtendő munka.* Legyen M a Föld tömege, R a sugara, k a gravitációs állandó; m valamely pontszerű tömeg, r ennek távolsága a Föld középpontjától.

A Föld által az utóbbira gyakorolt *vonzóerő:*

$$P = -\varkappa \frac{M \cdot m}{r^2} = -\varkappa \frac{M}{R^2} \cdot \frac{m}{k^2} = \frac{mg}{k^2} ,$$

ahol $r = k \cdot R$ és a $-$ előjellel a P-nek a Föld középpontja felé irányítottságát jelezzük.

A vonzóerővel szemben kifejtendő munka, amikor az m tömeget az R sugárról (a Föld felszínéről) ϱ sugárra távolítjuk ($\varrho > R$):

$$L = \int_R^\varrho (-P) \cdot dr = -\int_R^\varrho P \cdot dr = +\varkappa Mm \int_R^\varrho \frac{dr}{r^2} = \varkappa Mm \left(\frac{1}{r}\right)_\varrho^R = \varkappa Mm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho}\right) =$$

$$= \varkappa \cdot \frac{M}{R^2} \cdot mR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho}\right) = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho}\right) = mg \frac{R}{\varrho} (\varrho - R) .$$

* L.: Verebély: Vill. művek II. köt.

Látható, hogy a Föld felszíne közelében, azaz $R/\varrho \approx 1$ esetén: $L \approx mgh$, ahol $h = \varrho - R$.

Ha viszont $\varrho \gg R$, azaz $\dfrac{R}{\varrho} \approx 0$, akkor:

$L \approx mgR \approx \varkappa \dfrac{Mm}{R}$, ha pedig $\varrho \to \infty$, akkor pontosan $L = mgR = \varkappa \dfrac{Mm}{R}$. Ha tetszőleges $r > R$ sugárról taszítjuk m-et a végtelenbe, akkor:

$$L = m\left(g\frac{R^2}{r^2}\right)r = \varkappa\frac{Mm}{r} = \varkappa Mm \cdot \int_r^{\varrho} \frac{dr}{r^2}, \quad \text{ahol } \varrho \to \infty.$$

Ez utóbbi egyúttal definíciószerűen, az r sugáron levő m tömeg *potenciális energiájá*nak -1-szeres $(-E_p)$, ill. az M földtömeg *potenciálja*, az r sugáron levő m tömegre vonatkozólag (U_p):

$$L = \varkappa\frac{Mm}{r} = U_p = -E.$$

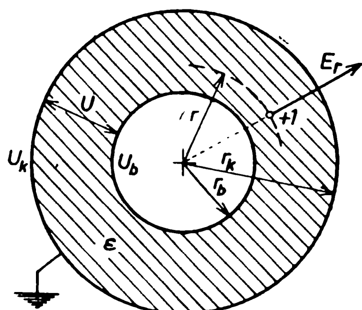
Ha az r sugárról a végtelenbe taszítás végig elhanyagolható sebességgel történik (azaz a kinetikai energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 0$), akkor a *munkatétel* szerint a $(-P)$ erőnek a vonzással szemben közben végzett munkája egyenlő a potenciális energia megváltozásával:

$$L = (E_p)_\infty - (E_p)_r = 0 - \left(-\varkappa\frac{M \cdot m}{r}\right) = \varkappa\frac{Mm}{r},$$

vagyis fentebbi eredményünk összhangban van a munkatétellel.

3. *Hengeres kondenzátor kapacitása**. Végtelen hosszúnak tekintett, r_k és r_b sugarú koncentrikus hengerek hosszegységnyi részének kapacitását számítjuk! Ekkor tetszőleges r sugarú koncentrikus hengerfelületen a (sugárirányú) *térerősség*, ha a fegyverzetek között ε dielektromos állandójú szigetelő van (l. a 20. ábrát):

$$E_r = \frac{4\pi q}{2r\pi \cdot 1 \cdot \varepsilon} = \frac{2q}{\varepsilon \cdot r} \text{ (kifelé irányított!)};$$



20. ábra

ugyanis a térerősség nagysága megállapodásszerűen egyenlő az erővonal-sűrűséggel, amikor a + töltésegységből 4π erővonal ered! Itt q a belső henger hosszegységnyi darabjának töltése. A kondenzátor *feszült-*

* L. Verebély: Vill. művek, II. kötet.

*sége** (mint a fegyverzetek közti $U_b - U_k > 0$ potenciálkülönbség):

$$U = \int_{r_b}^{r_k} E_r \cdot dr = +\frac{2q}{\varepsilon}\int_{r_b}^{r_k}\frac{dr}{r} = +\frac{2q}{\varepsilon}[\ln r]_{r_b}^{r_k} = +\frac{2q}{\varepsilon}\ln\frac{r_k}{r_b} = U_b - U_k = U_b,$$

feltéve, hogy a külső henger földelve van, azaz $U_k = 0$. A hosszegységnyi kondenzátorrész *kapacitása,* mint az egységnyi feszültségre emelő töltés mennyisége:

$$c = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{2q}{\varepsilon}\ln\frac{r_k}{r_b}} = \frac{\varepsilon}{2\ln\frac{r_k}{r_b}} = \frac{\varepsilon}{\ln\frac{r_k^2}{r_b}}.$$

4. *A vas korrózió-idejének meghatározása.*** Erre szolgál az elmélet szerint a következő differenciálegyenlet:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p}{y},$$

ahol y a korrodeált réteg vastagsága, t időpontban és p állandó. – Kezdeti feltételként írjuk elő, hogy a folyamat kezdetén az anyag még teljesen korróziómentes, azaz

$$y(0) = 0.$$

Oldjuk meg a differenciálegyenletet az a. ε) ε_3) szerint a kezdeti feltétel figyelembevételével, majd az ilyen megoldás birtokában, állapítsuk meg $y = 2p$ vastagságú korrózióréteg képződési idejét!

A változókat szétválasztva, mindkét oldalt saját változója szerint integrálva, a két integrálási állandót egybevonva, nyerjük:

$$\int y\,dy = p\int dt, \quad \frac{y^2}{2} + C_1 = pt + C_2, \quad y^2 = 2pt + C.$$

A kezdeti feltétel szerint: $y^2(0) = 0 = 2p = 0 + C$, azaz $C = 0$. A korrózió időbeli lefolyása tehát: $y = \sqrt{2pt}$. A $t = 2p$ idő alatt képződő korrózió-réteg vastagsága ebből:

$$y = \sqrt{2p \cdot 2p} = 2p.$$

5. *Befogott és paralel koncentrált erőkkel terhelt tartó maximális deformációs munkája.**** A tartó a mellékelt ábra szerint van terhelve. Kérdés, hogyan választandó a z távolság, hogy az L deformációs munka maximális legyen.

* A villamosságtanban az $E_r = -\frac{dU_r}{dr}$ felfogás szokásos, így

$$U_k - U_b = -\int_{r_b}^{r_k} E_r \cdot dr, \quad \text{azaz} \quad U = U_b - U_k = \int_{r_b}^{r_k} E_r\,dr.$$

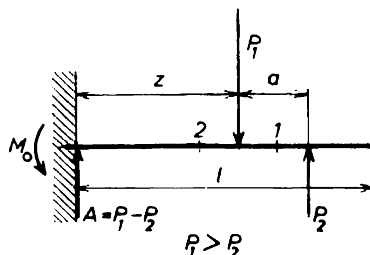
** L. Cell: Engineering Problems.

*** L. Wittenbauer: Aufgabensammlung zur technischen Mechanik.

A $0 \leq \xi \leq z$ és a $z \leq \xi \leq z+a$ szakasz egy-egy tetszőleges keresztmetszetére (2 és 1 jelű) felírva a jobb oldali nyomatékot (tőlük mérve az x-et):

$$M_1 = P_2 \cdot x, \qquad 0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = P_2 x - P_1(x-a), \qquad a \leq x \leq a+z.$$



21. ábra

Ezekkel a deformációs munka:

$$L = \frac{1}{2IE}\left[\int_0^a M_1^2 \cdot dx + \int_a^{z+a} M_2^2 \cdot dx\right]$$

Az M_1 és M_2 kifejezést beírva, majd integrálva nyerjük:

$$L = \frac{1}{2IE}\left[\frac{P_2^2 a^3}{3} + a^2 P_2^2 \cdot z - P_2(P_1 - P_2) \cdot z^2 + \frac{(P_1 - P_2)^2}{3} z^3\right].$$

A L maximális ott lehet, ahol $\frac{dL}{dz} = 0$. A deriváltat előállítva, majd 0-val egyenlővé téve,

$$z_1 = z_2 = \frac{aP_2}{P_1 - P_2} \text{ adódik.}$$

Igazolható, hogy e z_1-nél L valóban maximális és értéke:

$$L_{\max} = \frac{a^3}{\sigma IE} \cdot \frac{P_1 P_2^2}{P_1 - P_2}.$$

MÁSODIK RÉSZ

A HATÁROZATLAN INTEGRÁLÁS ALAPMÓDSZEREI

2. §. HELYETTESÍTÉS

Az elemi integrálszámítás fontos, elegáns módszere. Két alakban használatos.

a) A módszer első alakja

Számos függvényszorzat integrálásánál alkalmazható: *Egy szorzatalakú $\varphi(x)$ integrálandó $\Phi(x)+C$ primitív függvényeit közvetlenül felírhatjuk, ha a $\varphi(x)$ egyik tényezője valamely $u(x)$ függvény $u'(x)$ deriváltja, a másik tényezője pedig eme $u(x)$-nek egy olyan $f[u(x)]$ függvénye, amellyel kapcsolatban az $f(u)$ függvény $F(u)+C$ primitív függvényeit ismerjük. Ezekre vezet ugyanis az $u(x)=u$, $u'(x)\,dx=du$, $f[u(x)]=f(u)$* **helyettesítés** *és végül a keresett $\Phi(x)+C$ primitív függvényekre az $u=u(x)$, $F(u)=F[u(x)]$ visszahelyettesítés.* Betűkkel:

$$\boxed{\int \varphi(x)\,dx=\int f[u(x)]u'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C=F[u(x)]+C=\Phi(x)+C}$$

(Itt hallgatólagosan feltételezzük, hogy $u(x)$ valamely S_x szakaszon differenciálható és a megfelelő S_u értékszakaszon az $f(u)$-nak $F(u)+C$ primitívjei is léteznek.)

Megjegyzendő, hogy ezen eljárás a

$$\frac{d}{dx}\{F[u(x)]\}=\left[\frac{dF(u)}{du}\right]_{u=u(x)}\cdot\frac{du(x)}{dx}=f[u(x)]\cdot u'(x)$$

differenciálási *láncszabály megfordítása.*

Előfordul, hogy az $\int f(u)\,du$ integrál nem közvetlenül ismeretes ugyan, de az $\int \varphi(x)\,dx$ eredetinél könnyebben meghatározható. Máskülönben az eljárás célszerűtlen!

Tanulmányozzuk a helyettesítés eme első alakját a leggyakoribb $f(u)$ és $u(x)$ függvényekkel kapcsolatban!

α) $\int \mathbf{f(ax+b)\,dx}$

Itt $u=ax+b$; az $f(u)$ tetszőleges, ismert vagy egyszerűen meghatározható primitívekkel. Ekkor $du=a\,dx$ lévén, áll:

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a\,dx=\frac{1}{a}\int f(u)\,du=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Ezen eredmény alapján hasznos összeállítani *az alapintegrálok általánosabb alakjának táblázatát!*

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C,\qquad n\neq -1$$

$$\int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln C(ax+b)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{ar\,th}\frac{x}{a}+C=\frac{1}{a}\ln C\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},\qquad x^2<a^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=-\frac{1}{a}\operatorname{ar\,cth}\frac{x}{a}+C=\frac{1}{a}\ln C\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},\qquad x^2>a^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\operatorname{ar\,sh}\frac{x}{a}+C=\ln C\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\operatorname{ar\,ch}\frac{x}{a}+C=\ln C\left(\frac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

$$\int e^{ax+b}\cdot dx=\frac{1}{a}\,e^{ax+b}+C$$

$$\int a^{\alpha x+\beta}\cdot dx=\frac{1}{\alpha}\,\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a}+C$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

$$\int \operatorname{sh}(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{ch}(ax+b)+C$$

$$\int \operatorname{ch}(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{sh}(ax+b)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{1}{a}\operatorname{ctg}(ax+b)+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)+C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{cth}\,(ax+b)+C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\,\mathrm{th}\,(ax+b)+C$$

Igazoljuk a helyettesítés részletezésével e formulákat!

β) $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$

Itt $f(u)=\frac{1}{u}$ és $u(x)$ tetszőleges differenciálható függvény.

Ekkor:

$$\int \frac{u'(x)\,dx}{u(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln Cu = \ln Cu(x)$$

Ez az ún. *logaritmikus integrálás szabálya!*

γ) $\int u^n(x)u'(x)\,dx$

Itt $f(u)=u^n$, ahol $n\neq -1$, de egyébként tetszőleges valós szám.

Ekkor:

$$\int u^n(x)u'(x)\,dx = \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}+C$$

A példákat az $n=+k$, $+\frac{1}{k}$, $-k$, $-\frac{1}{k}$ és $\pm\frac{k}{l}$ eseteknek megfelelően (k és l pozitív egész), az

$\gamma_1)$ $\int u^k(x)u'(x)dx$, $\gamma_2)$ $\int \sqrt[k]{u(x)}\,u'(x)\,dx$, $\gamma_3)$ $\int \frac{u'(x)}{u^k(x)}dx$, $\gamma_4)$ $\int \frac{u'(x)}{\sqrt[k]{u(x)}}dx$ és $\gamma_5)$ $\int u^{\frac{k}{l}}(x)u'(x)\,dx$

típusokba soroltuk!

Gyakori speciális eset: $n=-\frac{1}{2}$, amikor is

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{n(x)}}dx = \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u(x)}+C.$$

δ) $\int f[u^2(x)]u'(x)\,dx$

$\delta_1)$ $\int [1-u^2(x)]^k u'(x)\,dx$. A k pozitív egész, $f(u)=(1-u^2)^k$; ha $u(x)=\sin x$, vagy $\cos x$, akkor az

$$\int \cos^{2k+1}x\,dx \quad \text{és} \quad \int \sin^{2k+1}x\,dx$$

alakú integrálokról van szó. Helyettesítéssel az $\int (1-u^2)^k\,du$ alakra jutunk, majd egyszerűen hatványozás, a polinom integrálása s végül visszahelyettesítés következik.

Az $f(u)=(1+u^2)^k$, $u(x)=\text{sh}\, x$ és $f(u)=(u^2-1)^k$, $u(x)=\text{ch}\, x$ esetben az

$$\int \text{ch}^{2k+1} x \cdot dx \quad \text{és} \quad \int \text{sh}^{2k+1} x\, dx$$

integrálokkal van dolgunk!

$\delta_2)$ $\int [1-\mathbf{u}^2(\mathbf{x})]^k \mathbf{u}^{2l}(\mathbf{x})\, \mathbf{u}'(\mathbf{x})\mathbf{dx}$. A k pozitív egész, az l is és ha $u(x)=\sin x$ vagy $\cos x$, akkor az

$$\int \cos^{2k+1} x \cdot \sin^{2l} x\, dx, \quad \text{ill.} \quad \int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^{2l} x\, dx$$

integrálok állnak elő. Itt a helyettesítés az $\int (1-u^2)^k u^{2l}\, du$ alakra vezet s tovább az előbbi módon járunk el.

$\varepsilon)$ $\int \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x})]\, \mathbf{u}'(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}$	Itt $f(u)$ és $u(x)$ a legkülönbözőbb függvények! Igyekezzünk ezeket felismerni és az $\int f(u)\, du$ alakra térni!

ζ Az $\alpha) - \varepsilon)$ esetek önálló felismerése és megoldása céljából beiktattunk nagyszámú gyakorló feladatot!

Példák és feladatok

α 1. $\int (2x+5)^{3/5}\, dx = ?$ – Itt a helyettesítés

$u=ax+b=2x+5$, $du=a\, dx=2dx$, azaz $dx=\frac{1}{2}du$, továbbá $f(u)=u^{3/5}$.

Így az $\alpha_1)$ szerint:

$$I=\frac{1}{2}\int u^{3/5}\, du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{8/5}}{8/5}+C=\frac{5u\sqrt[5]{u^3}}{16}+C.$$

Visszahelyettesítve u helyébe az $(2x+5)$-et, nyerjük végül:

$$I=\frac{5}{16}\,(2x+5)\sqrt[5]{(2x+5)^3}+C.$$

2. $\int \cos\left(\frac{x}{3}+5\right) dx = ?$ – Itt $u=\frac{1}{3}x+5$, $a=\frac{1}{3}$, $f(u)=\cos u$, $F(u)=\sin u$.

Tehát az $\alpha_1)$ végképlet szerint: $I=\frac{1}{a}F(ax+b)+C=3\sin\left(\frac{x}{3}+5\right)+C$.

3. $\int \frac{dx}{\cos^2(4-3x)} = ?$ – Ez esetben $a=-3$, $f(u)=\frac{1}{\cos^2 u}$, $F(u)=\text{tg}\, u$, tehát $I=-\frac{1}{3}\,\text{tg}\,(4-3x)+C$.

4. $\int \frac{dx}{4x^2-9} = ?$ – Itt $I = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 1} = -\frac{1}{9}\,\frac{1}{2/3}\,\text{ar th}\,\frac{2}{3}x + C =$

$= -\frac{1}{6}\,\text{ar th}\,\frac{2}{3}x + C.$

5. $\int \text{sh}\,(5x-7)\,dx = ?$

6. $\int \frac{dx}{4x-3} = ?$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8}} = ?$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = ?$

9. $\int e^{7x+1}\,dx = ?$

*10. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-5x+6} = ?$

11. $\int \sqrt{ax+b}\,dx = ?$

12. $\int (ax+b)^n \cdot dx = ?$ $(n > 0)$

13. $\int \frac{dx}{(a+b)^n} = ?$ $(n \neq +1;\quad n > 0)$

14. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} \cdot dx = ?$

15. $\int a^{-x}\,dx = ?$

16. $\int a^{3x}\,dx = ?$

17. $\int (e^x+1)^3\,dx = ?$

18. $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = ?$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = ?$

20. $\int \frac{dx}{ax+b} = ?$

*21. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = ?$ – Oldjuk meg az integrált az

$$x^2+2x+5 = (x^2+2x+1)+4 = (x+1)^2+2^2 = 4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]$$

előállítás felhasználásával!

*22. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = ?$ – Az $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$

felbontás felhasználásával járunk el!

*23. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = ?$ – Használjuk fel az

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right)$$ felbontást!

*24. $\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = ?$ (L. hátul!)

25. $\int \cos^2 ax\,dx = ?$ (L. hátul!)

26. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = ?$ – A 23. pl. szerint!

27. $\frac{dx}{4x^2+4x-3} = ?$ – A 21. pl. szerint!

28. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} = ?$

29. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = ?$

30. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = ?$

31. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} = ?$

32. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = ?$

33. $\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos^2 2t} = ?$

β

1. $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = ?$ — Itt $u(x)=x^2+1$, $u'(x)=2x$, $u'(x)\,dx=2x\,dx$. Az $u(x)=u$, $u'(x)\,dx=du$ helyettesítés $I=\int \frac{du}{u} = \ln Cu$ eredményre vezet, amely az $u=u(x)=x^2+1$ visszahelyettesítéssel így alakul:

$$I=\ln Cu(x)=\ln C(x^2+1),$$

2. $\int \frac{x^2\,dx}{2+x^3} = ?$ – Ez esetben $u(x)=2+x^3$, $u'(x)\,dx=3x^2dx$. Tehát $I=\frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{2+x^3} = \frac{1}{3} \ln C(2+x^3)$, az α_2)-nek megfelelően.

3. $\int \frac{dx}{x \ln x} = ?$ – Itt $I=\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = \ln(C \ln x)$.

4. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = ?$ – Esetünkben

$$I=\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \ln C \sin x.$$

5. $\int \frac{t\,dt}{a+bt^2} = ?$

6. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = ?$

7. $\int \frac{(y+2)\,dy}{y^2+4y} = ?$

8. $\int \frac{e^{3\varphi}d\varphi}{a+be^{3\varphi}} = ?$

9. $\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x} = ?$

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+\pi}\,dx = ?$

11. $\int \frac{\sin x\,dx}{2\left(\sin^2\frac{x}{2}-1\right)} = ?$

12. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx = ?$

13. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = ?$

14. $\int \frac{cx\,dx}{a+bx^2} = ?$

*15. $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$ – Átalakítjuk az integrálandót:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\cdot 2} = \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Ennek megfelelően:

$$I = \ln k \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

*16. $\int \frac{dx}{\cos x} = ?$ – Ez esetben $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ azonosság felhasználásával írhatjuk:

$$I = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin u} = \ln k \operatorname{tg}\frac{u}{2} = \ln k \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

összhangban az α_1)-gyel.

*17. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$. – A nevező deriváltja: $a^2\, 2\sin x\cos x - b^2\, 2\cos x\cdot$ $\cdot\sin x = 2(a^2-b^2)\sin x\cos x$. Erre való tekintettel:

$$I = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln k(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x).$$

18. $\int \frac{21\sin x\cos x}{4\cos^2 x + 25\sin^2 x}\,dx = ?$ Az előbbi módon!

19. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = ?$ A 15. pl. szerint! 20. $\int_2^3 \frac{2t\,dt}{1+t^2} = ?$

γ

γ_1) $\int u^k(x)u'(x)\,dx$ – 1. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = ?$

Az integrált $I = \ln^2 x\cdot\frac{dx}{x}$ alakban írva, látható, hogy $I = \int \ln^2 x\cdot(\ln x)'\,dx$. Tehát $u =$ $= \ln x$, $du = (\ln x)'\,dx = \frac{dx}{x}$ helyettesítéssel: $I = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$. Végül visszahelyettesítve: $I = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

2. $\int \frac{(\text{arc}\sin x)^7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$ – Esetünkben $I=\int (\text{arc}\sin x)^7 \cdot (\text{arc}\sin x)'\,dx = \int (\text{arc}\sin x)^7 \cdot$ $\cdot\, d\,(\text{arc}\sin x)$.

Tehát $u=\text{arc}\sin x$ helyettesítéssel: $I=\int u^7\,du = \frac{u^8}{u}+C$ és visszahelyettesítve:

$$I=\frac{1}{8}(\text{arc}\sin x)^8+C.$$

3. $\int \sin^3 x \cos x\,dx = ?$

4. $\int \frac{(\text{arc tg}\, x)^2}{1+x^2}\,dx = ?$

5. $\int 2x(x^2+1)^3\,dx = ?$

6. $\int e^x(e^x-1)^4\,dx = ?$

7. $\int \frac{\text{tg}^7 x}{1-\sin^2 x}\,dx = ?$

(A nevező más alakban?)

8. $\int_0^{\pi/4} \frac{(\text{arc tg}\, x)^5}{1+x^2}\,dx = ?$

9. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x\,dx = ?$

*10. $\int \text{tg}\, x\,(\ln\cos x)^2\,dx = ?$ – Itt $(\ln\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\text{tg}\, x$ lévén, $u=\ln\cos x$ helyettesítéssel nyerjük:

$$I=-\int u^2\,du = \frac{-u^3}{3}+C = -\frac{1}{3}(\ln\cos x)^3+C.$$

*11. $\int \frac{\ln \text{tg}\, x\,dx}{\sin 2x} = ?$ – Az $(\ln\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\text{tg}\, x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$ deriváltra való tekintettel:

$$I=\frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{4}(\ln\text{tg}\, x)^2+C.$$

*12. $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x\,dx = ?$ – Használjuk fel a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ azonosságot!

13. $\int \sin^3 x\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx = ?$ – Alakítsuk át a zárójeles kifejezést!

$\gamma_2)$ $\int \sqrt[k]{u(x)}\cdot u'(x)\,dx.$ – 14. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = ?$

Itt $I=\int (x^2+1)^{1/2}(x^2+1)'\,dx = \int (x^2+1)^{1/2}\,d(x^2+1)$ alakban írható az integrál. Az

$u = x^2 + 1$ helyettesítéssel, u-szerinti integrálással, majd visszahelyettesítéssel nyerjük:

$$I = \int u^{1/2} \cdot du = \frac{3}{2} u^{3/2} + C = \frac{2}{3} (x^2+1)^{3/2} + C = \frac{2}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C.$$

15. $\int \frac{\sqrt[3]{\text{arc tg } x}}{1+x^2}\, dx = ?$ – Ez esetben $I = \int (\text{arc tg } x)^{1/3}\, d\,(\text{arc tg } x)$.

Tehát $u = \text{arc tg } x$ s ezzel: $I = \int u^{1/3}\, du = \frac{3}{4}\, u^{4/3} + C = \frac{3}{4} \text{arc tg } x \sqrt[3]{\text{arc tg } x} + C$.

16. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = ?$

17. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2}\, dx = ?$

18. $\int \cos x \sqrt[4]{\sin x}\, dx = ?$

19. $\int \frac{\sqrt[3]{\text{tg } x}}{\cos^2 x}\, dx = ?$

20. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx = ?$

21. $\int_0^1 \frac{\sqrt{\text{arc tg } x}}{1+x^2}\, dx = ?$ (L. hátul!)

22. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\, dx = ?$

23. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[5]{\text{tg } x}}{\cos^2 x}\, dx = ?$

*24. $\int \text{ctg } x \sqrt{\ln \sin x}\, dx = ?$ – Itt az $(\ln \sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{ctg } x$ derivált figyelembe veendő! L. a 10. példát!

γ_3) $\int \frac{u'(x)}{u^k(x)}\, dx$. 25. $\int \frac{2x\, dx}{(1+x^2)^2} = ?$ – Ez esetben $I = \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$. Tehát az $u = 1 + x^2$ helyettesítéssel, u-szerinti integrálással és végül visszahelyettesítéssel nyerjük:

$$I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1+x^2} + C.$$

26. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^4 x} = ?$ – Ekkor

$$I = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x} = \int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{3u^3} + C = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + C.$$

27. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = ?$

28. $\int \frac{e^x\, dx}{(e^x+\pi)^{11}} = ?$

29. $\int \frac{dx}{x \ln^5 x} = ?$

30. $\int \frac{dx}{(\text{ar tg } x)^4 (1-x^2)} = ?$

31. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{(\ln \sin x)^6} = ?$

(L. a 24. példát!)

32. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}} = ?$

*33. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^2 x} = ?$

(L. hátul!)

*34. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x}\, dx = ?$ – Itt a $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ eredményt kell felhasználni! (L. hátul!)

*35. $\int \frac{2x\, dx}{1+3x^2+3x^4+x^6} = ?$ – A nevezőt írjuk fel $(1+x^2)^3$ alakban; látható, hogy a számláló: $2x = (1+x^2)'$.

γ_4) $\int \frac{u'(x)\, dx}{\sqrt[k]{u(x)}}$. – Minta: $\int \frac{10x\, dx}{\sqrt[3]{5x^2-3}} = ?$ – Itt $I = \int \frac{d(5x^2-3)}{\sqrt[3]{5x^2-3}}$.

Tehát $u = 5x^2 - 3$ helyettesítéssel, u-szerinti integrálással, majd visszahelyettesítéssel ez adódik:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}}\, du = \frac{u^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(5x^2-3)^2} + C.$$

36. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = ?$ – Ekkor $I = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{\ln x}} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\ln x} + C.$

37. $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}} = ?$

38. $\int\limits_0^a \frac{2x\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

39. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = ?$

40. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt[4]{\sin^2 x + 1}} = ?$

41. $\int \frac{3 \sin x\, dx}{\sqrt[7]{1-\cos x}} = ?$

42. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} = ?$

43. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sqrt[10]{\ln \sin x}} = ?$

44. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}} = ?$

45. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt[5]{e^x - 1}} = ?$

46. $\int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sh} x + c}} = ?$

*47. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$ – Átalakítás: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

*48. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = ?$ – A $\sqrt{1-x}$-gyel szorozzuk a számlálót és nevezőt:

$I = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; tovább, mint előbb!

49. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = ?$

50. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx = ?$

γ_5) $\int u^{\frac{k}{l}}(x)' u(x)\,dx$.

51. $\int \frac{15x^2\,dx}{(5x^3-3)\sqrt[3]{5x^3-3}} = ?$ – Esetünkben

$I = \int \frac{15x^2\,dx}{(5x^3-3)^{4/3}} = \int (5x^3-3)^{-4/3}\,d(5x^3-3)$. Az $u = 5x^3-3$ helyettesítéssel:

$I = \int u^{-4/3}\,du = \frac{u^{-1/3}}{-1/3} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{u}} + C$. Visszahelyettesítve: $I = -\frac{3}{\sqrt[3]{5x^3-3}} + C$.

52. $\int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^{3/4}} = ?$

53. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}} = ?$

54. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = ?$

55. $\int \frac{\ln x\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = ?$

56. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sqrt[10]{\ln^3 \sin x}} = ?$

*57. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}} = ?$ – Átalakítjuk az integrálandót:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos^6 x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}.$$ Folytassuk!

δ δ_1)[1] $\int [1-u^2(x)]^k \cdot u'(x)\,dx$. – 1. $\int \cos^3 x\,dx = ?$ – Ekkor az integrálandó célszerűbb alakban: $I = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,d(\sin x)$. Az $u = \sin x$ helyettesítéssel nyerjük: $I = \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} + C$. Végül visszahelyettesítve: $I = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

[1] Lásd e típusokat még a 6. § a. α) helyen!

2. $\int \sin^5 x\, dx = ?$

3. $\int \cos^5 x\, dx = ?$

4. $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx = ?$

5. $\int \operatorname{sh}^5 x\, dx = ?$

*6. $\int (1+\cos 2x)^{3/2}\, dx = ?$
(L. hátul!)

*7. $\int (\operatorname{ch} 2x - 1)^{5/2}\, dx = ?$
(L. hátul!)

*8. $\int (1-\ln^2 \sin x) \operatorname{ctg} x\, dx = ?$ – Ekkor írhatjuk:

$I = \int (1-\ln^2 \sin x)\, d(\ln \sin x) = \int (1-u^2)\, du$, ahol $u = \ln \sin x$, $du = \operatorname{ctg} x\, dx$. Folytassuk!

$\delta_2)$ $\int [1-u^2(x)]^k u^{2l}(x) u'(x)\, dx.$ – 9. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = ?$ – Alakítsuk át az integrálandót: $I = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\, d(\sin x)$. Az $u = \sin x$ helyettesítéssel az integrál így alakul: $I = \int u^2(1-u^2)\, du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$. Visszahelyettesítés után: $I = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin x + C$.

10. $\int \cos^2 x \sin^5 x\, dx = ?$

11. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\, dx = ?$

12. $\int \sin^4 x(1+\cos 2x)^{3/2} dx = ?$
(L. hátul!)

13. $\int \operatorname{sh}^2 x(\operatorname{ch} 2x + 1)^{3/2}\, dx = ?$
(L. hátul!)

*14. $\int \frac{(1-\ln^2 x)\ln^4 x}{x}\, dx = ?$ – Itt $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$ helyettesítéssel ez adódik: $I = \int (1-u^2)\, u^4\, du$. Folytassuk!

ε 1. $\int e^{\sin x}\cos x\, dx = ?$ – Itt szembetűnő, hogy $I = \int e^{\sin x}\, d(\sin x)$. Tehát $u = \sin x$, $du = \cos x\, dx$, $e^{\sin x} = e^u = f(u)$ helyettesítéssel: $I = \int e^u\, du = e^u + C$ és visszahelyettesítve: $I = e^{\sin x} + C$.

2. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\, dx = ?$ – Ez esetben célszerűen $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{dx}{x^2}$, $\sin\frac{1}{x} = \sin u = f(u)$ helyettesítéssel élünk, amellyel: $I = -\int \sin u\, du = \cos u + C$ és végül: $I = \cos\frac{1}{x} + C$.

3. $\int 5x^4 \cdot \sin(x^5+1)\,dx = ?$

4. $\int x \operatorname{tg} x^2\,dx = ?$

5. $\int e^{-x^3} x^2\,dx = ?$

6. $\int e^x (\sin e^x)\,dx = ?$

*7. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1} = ?$

8. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4} = ?$

9. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-1}} = ?$

*10. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4} = ?$

11. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}} = ?$

12. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\sin^2 x} = ?$

(A 3—12. példákra vonatkozólag hátul az u és $f(u)$ is fel van tüntetve!)

*13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = ?$

*14. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

15. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = ?$

*16. $\int \sin 2x e^{3\cos^2 x}\,dx = ?$

*17. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = ?$

18. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^{10} x}\,dx = ?$

*19. $\int \frac{dx}{1-2\sqrt{x}} = ?$

*20. $\int \operatorname{ctg} x \operatorname{sh}(\ln \sin^2 x)\,dx = ?$

21. $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = ?$

22. $\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

(A 13—22. példákra vonatkozólag hátul megjegyzések is találhatók!)

*23. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = ?$ – Az $1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ azonosság felhasználásával integrálunk átalakítható így: $I = \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg}^2 x+1}\,\frac{dx}{\cos^2 x}$. Folytassuk!

*24. Az előbbi példa $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arc\,tg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ helyettesítéssel is megoldható: $I = \int \frac{t^3\,dt}{1+t^2}$. Folytassuk!

*25. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = ?$ – Osszuk a számlálót és a nevezőt $\cos^2 x$-szel:

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2 \operatorname{tg}^2 x + b^2}.$$ Folytassuk!

ζ *Vegyes gyakorló feladatok az egész α-hoz:*

1. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)\,dx = ?$

2. $\int 12x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx = ?$

3. $\int 2x^2\sqrt[15]{x^3+21}\,dx = ?$

4. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}} = ?$

5. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} = ?$

6. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{(x^2-3x+8)^5} = ?$

7. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx = ?$

8. $\int xe^{x^2}\,dx = ?$

9. $\int \frac{x}{x+4}\,dx = ?$

10. $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx = ?$

11. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{1+x^2} = ?$

12. $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx = ?$

13. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = ?$

14. $\int \frac{x^4\,dx}{1-x} = ?$

15. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx = ?$

16. $\int \sqrt{8-2x}\,dx = ?$

17. $\int \frac{m\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = ?$

18. $\int \sin(2x-3)\,dx = ?$

19. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5} = ?$

20. $\int \frac{dx}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)} = ?$

21. $\int e^{-3x+1}\,dx = ?$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}} = ?$

23. $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}}\,dx = ?$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = ?$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = ?$

26. $\int \frac{\pi\,dx}{1+9x^2} = ?$

27. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = ?$

28. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+a^2} = ?$

29. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$

30. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4+x^5}} = ?$

31. $\int \frac{dx}{x(x-1)} = ?$

32. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)} = ?$

33. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = ?$

34. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10} = ?$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} = ?$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = ?$

*37. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\, dx = ?$

*38. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^4 x} = ?$

*39. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = ?$

*40. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = ?$

*41. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = ?$

*42. $\int e^{2x^2+\ln x}\, dx = ?$

*43. $\int (\operatorname{ch}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax)\, dx = ?$

*44. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx = ?$

*45. $\int \frac{e^x\, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = ?$

b) A helyettesítés módszerének második alakja

Az integrál jele alatt az x integrálási változót alkalmas, differenciálható $x = x(u)$ függvénnyel, az x változó differenciálját pedig az $x = x(u)$ függvény differenciáljával **helyettesíthetjük.** *Ha az így nyert új $\varphi(u)$ integrálandó $\Phi(u)+C$ határozatlan integrálját, valamint az $x = x(u)$ függvény $u = u(x)$ inverzét meg tudjuk határozni, akkor a velük előállított $\Phi[u(x)]+C$ már az eredeti $f(x)$ integrálandó $F(x)+C$ primitív függvényeit adja. – Röviden:*

$$\int f(x)\, dx = \int f[x(u)]x'(u)\, du = \int \varphi(u)\, du =$$
$$= \Phi(u) + C = \Phi[u(x)] + C = F(x) + C.$$

Megfigyelhető, hogy a helyettesítés első alakjánál $u(x) \to u$, a másodiknál viszont $x \to x(u)$, szavakkal pedig *függvény → változó,* ill. *változó → függvény* a helyettesítés iránya. Mindkét esetben a *differenciálokat* is érinti a helyettesítés; mindkettőnél az új változós integrált megoldva *visszatérünk* az eredeti változóhoz; mindkét alak csakis akkor célszerű, ha az új változós integrál *az eredetinél könnyebben megoldható!*

A fenti formulát differenciálással igazolhatjuk!

Néhány integráltípus kivételével nem adható meg előre az alkalmas $x = x(u)$ helyettesítő függvény. Itt csak egy-két fontos, egyszerű esetet mutatunk be; a későbbi alfejezetekben még további helyettesítéseket fogunk megismerni!

α) $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ gyököt tartalmazó integrálok gyöktelenítése az

$$x = x(u) = a \sin u, \quad a \cos u, \quad a \operatorname{tg} u, \quad a \operatorname{sh} u, \quad a \operatorname{ch} u$$

függvények valamelyikével, amely a gyökalatti kifejezést egy függvény négyzetévé teszi. (Lásd még a 6. §. a. ϑ) helyen!)

β) $\int \mathbf{R}(\sin x, \cos x)\, dx$ trigonometrikus integrálok racionalizálása (itt a szokásnak megfelelő t betűt használva): $x = x(t) = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ azaz

$t=t(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel. Ekkor

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

(Lásd bővebben 6. §. a. ζ).

$\gamma)\ \int \mathbf{R}\left(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \ldots, x^{\frac{k}{l}}\right)dx$	alakú irracionális integrálok racionalizálása ($a, b, c, d, \ldots, k, l$ egész) az $x=x(u)=u^{\lambda}$ helyettesítéssel, ahol λ a kitevők nevezőinek legkisebb közös többszöröse: $\lambda=Lkt\ (b, d, \ldots, l)$.
δ) **Különféle helyettesítések**	Csoportosításuk nehéz! Lásd a példákat!

Példák és feladatok

α 1. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=?$ – Ekkor $x=x(u)=\sin u$, $dx=x'(u)\,du=\cos u\,du$ helyettesítéssel nyerjük:

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du=\int\cos^2 u\,du=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2u)\,du=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C.$$

Minthogy az $x=x(u)=\sin u$ függvény inverze $u=u(x)=\arcsin x$, továbbá $\frac{1}{2}\sin 2u=$ $=\sin u\cos u=\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}=x\sqrt{1-x^2}$, ily módon írhatjuk végül: $I=\frac{1}{2}(\arcsin x+$ $+x\sqrt{1-x^2})+C$.

Megjegyzendő, hogy $x=x(u)=\cos u$ helyettesítéssel, sőt parciális integrálással is megoldható a feladat. (L. 3. §. a. δ) – 1. pl.).

2. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}=?$ – Itt az $x=x(u)=a\operatorname{tg}u$, $dx=x'(u)\,du=\frac{a\,du}{\cos^2 u}$ helyettesítéssel, valamint az $1+\operatorname{tg}^2 u=\frac{1}{\cos^2 u}$ azonosság felhasználásával így alakul az integrál:

$$I=\int\frac{\frac{a\,du}{\cos^2 u}}{\frac{a^2}{\cos^2 u}\,\frac{a}{\cos u}}=\frac{1}{a^2}\int\cos u\,du=\frac{1}{a^2}\sin u+C.$$

Minthogy esetünkben $x=a\operatorname{tg}u$ értelmében $\operatorname{tg}u=\frac{x}{a}$,

az ismert azonosság: $\sin u=\frac{\operatorname{tg}u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$ most $\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ alakban írható.

Vele a végeredmény: $I=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C.$

Az $u=u(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$ inverz itt mellőzhető volt! – E feladatnál az $x=x(u)=$ $=a\operatorname{sh}u$ helyettesítés is célravezető!

3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=?$ – Itt – az előző két feladatban látott módon – az $x=x(u)=$ $=\operatorname{ch}u$ helyettesítéssel járhatunk el. Ehelyett dolgozzunk most az $x=x(u)=\frac{1}{u}$, $dx=$ $=x'(u)\,du=-\frac{du}{u^2}$ helyettesítéssel:

$$I=\int\frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-\arcsin u+C_1=+\arccos u+C_2.$$

Végül az $u=\frac{1}{x}$ inverz függvénnyel írható: $I=\arccos\frac{1}{x}+C_2.$

4. $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=?$

5. $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=?$

6. $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}=?$

*7. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=?$

*8. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=?$

9. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=?$

*10. $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=?$

*11. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=?$

(A 4–11. példákra vonatkozólag hátul megjegyzések!)

12. $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx=?$ 13. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=?$ 14. $\int\frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx=?$

β

1. $\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}=?$ – A fentebb részletezett $x=x(t)=2\operatorname{arc\,tg}t$-es helyettesítéssel élünk:

$$I=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{1+2t-t^2}=2\int\frac{dt}{2-(t-1)^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{1-\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}\operatorname{ar\,th}\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Végül a $t = t(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ inverz függvény felhasználásával írhatjuk: $I = \sqrt{2}\,\operatorname{ar\,th}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{2} + C.$

Megjegyzendő, hogy e feladat a $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$ azonosságra való tekintettel $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ felfogásban is megoldható!

2. $\displaystyle\int \frac{(1 + \operatorname{tg} x)}{\sin 2x}\,dx = ?$ – Az előbbi helyettesítéssel élve, továbbá $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ és $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ figyelembevételével ezt írhatjuk:

$$I = \int \frac{1 + \dfrac{2t}{1 - t^2}}{2\dfrac{2t}{1 + t^2}\,\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}}\,\frac{2dt}{1 + t^2} = \int \frac{1 - t^4 + 2t(1 + t^2)}{2t(1 - t^2)^2}\,dt.$$

Látható, hogy az $x = x(t) = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ helyettesítés – amint ez gyakran előfordul – bonyodalmakra vezet! Folytatás helyett célszerűbb így eljárnunk:

$$I = \int \left[\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{2\cos^2 x}\right] dx = \frac{1}{2}\,(\ln \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x) + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4\cos x} = ?$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4\sin x} = ?$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x} = ?$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x} = ?$

7. $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\,dx = ?$

γ

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1 + \sqrt[3]{x})} = ?$ – Itt a gyökkitevők 2 és 3, tehát $\lambda = Lkt\,(2, 3) = 6$ és vele $x = x(u) = u^6$, $dx = x'(u)\,du = 6u^5\,du$. E helyettesítéssel: $I = 6\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{1 + u^2} = 6\int du - 6\int \frac{du}{1 + u^2} =$ $= 6(u - \operatorname{arc\,tg} u) + C$. Az inverz függvény $u = u(x) = \sqrt[6]{x}$ lévén, írhatjuk végül: $I = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}) + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1} = ?$ – Itt $\lambda = 4$ és $x = x(u) = u^4$, $dx = 4u^3\,du$, $u = \sqrt[4]{x}$. Ezekkel:

$$I = \int \frac{u^2 4u^2\,du}{u^3 + 1} = 4\int u^2\,du - \frac{4}{3}\int \frac{3u^3\,du}{u^3 + 1} = \frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3} + 1)\right] + C.$$

3. $\int \frac{x^{2/3} - x^{1/4}}{x^{1/2}} dx = ?$

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx = ?$

5. $\int \frac{x^{1/2}\, dx}{x+1} = ?$

6. $\int \frac{x^{1/2}\, dx}{x(x+1)} = ?$

7. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = ?$

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = ?$

9. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = ?$

(Hátul megjegyzések az előző példákhoz!)

δ

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}} = ?$ – Itt az $x = x(u) = a \sin^2 u$, $dx = 2a \sin u \cos u\, du$, valamint $u = u(x) = \arc\sin \sqrt{\frac{x}{a}}$. Ezekkel:

$$I = \int \frac{2a \sin u \cos u}{a \sin u \cos u} du = 2 \int du = 2u + C = 2 \arc\sin \sqrt{\frac{x}{a}} + C.$$

2. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3(a-x)}} = ?$ – Ismét $x = a \sin^2 u$ helyettesítéssel élve, nyerjük

$$I = \int \frac{a^2 \sin^4 u\, 2a \sin u \cos u}{a^2 \sin^3 u \cos u} du = 2a \int \sin^2 u\, du = a[u - \sin u \cos u] + C =$$

$$= a\left[\arc\sin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}\right] + C.$$

*3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = ?\ (a < x < b)$ – Ez esetben előny s a következő különleges helyettesítés:

$$x = a \cos^2 u + b \sin^2 u, \quad \left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{akkor} \quad x - a = (b-a) \sin^2 u,\ b - x =$$

$$= (b-a) \cos^2 u, \quad \frac{x-a}{b-x} = \operatorname{tg}^2 u,\ dx = 2(b-a) \sin u \cos u\, du.$$

$$\text{Ezekkel } I = 2 \int du = 2u + C = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = ?$

5. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x-1}} = ?$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x-1}} = ?$

*7. $\int \frac{x^5\, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}} = ?$

*8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = ?$

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx = ?$

(A 4–9. példákhoz megjegyzések találhatók hátul!)

ε

Vegyes gyakorlófeladatok az egész b) részhez:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x^2}} = ?$

2. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = ?$

3. $\displaystyle\int \sqrt{x(1-x)}\,dx = ?$

4. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = ?$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = ?$

6. $\displaystyle\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = ?$

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = ?$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

9. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = ?, \quad a>0$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = ?$

11. $\displaystyle\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = ?$

Műszaki alkalmazások

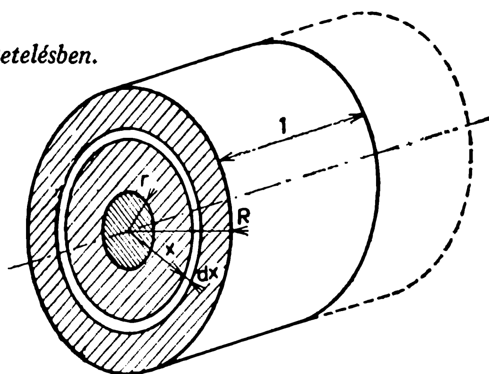
1. *Hővezetés ideális és valódi kábel-szigetelésben.*

A hővezetés *Fourier*-tétele szerint az F felületű, dl vastagságú közegen átáramló Q hőmennyiség

$$dT = -\sigma\frac{dl}{F}\cdot Q$$

hőfokesést létesít. Itt σ a hővezetési együttható, T a hőfok. E tétel láthatóan analogonja az elektromosság *Ohm*-törvényének.

Vizsgálódjunk az egységnyi hosszúságú, r vezetéksugarú, R szigetelés-sugarú kábeldarabon!



22. *ábra*

Ideális szigetelés esetén az egységnyi hosszúságú szigetelésen át sugárirányban áramló hőmennyiség éppen a hosszegységnyi vezetékdarab *Watt-vesztesége:* $Q_1 = I^2\cdot\varrho$, ahol ϱ a hosszegységnyi vezeték ohmos ellenállása. A *hőfokesés* egy tetszőleges $r \leq x \leq R$ sugarú, dx vastagságú (egységnyi hosszúságú) szigetelőcsőben tehát:

$$dT = -\sigma\frac{dx}{2\pi x\cdot 1}\cdot I^2\varrho,$$

* L. Verebély: Villamos művek, IV. kötet.

a teljes $R-r$ vastagságú szigetelésben pedig:

$$\tau_1 = -(T'_R - T'_r) = +\frac{\sigma}{2\pi} I^2\varrho \cdot \int_r^R \frac{dx}{x} = \frac{\sigma}{2\pi} I^2\varrho \cdot \ln\frac{R}{r}.$$

Valódi szigetelés esetén a vezeték *Watt-veszteségé*hez járul még a szigetelés szintén hővé alakuló *dielektromos vesztesége*. Ez utóbbi, egységnyi hosszúságú, $x-r$ vastagságú szigetelő csőben:

$$Q_2 = I_\nu^2 \cdot \left(\frac{1}{\omega C \cdot \operatorname{tg}\delta}\right) = a \cdot I_\nu^2 \cdot \ln\frac{x}{r} = Q_2(x), \qquad r \leqq x \leqq R.$$

E változó hőmennyiség az x sugarú, dx vastagságú szigetelő csőben, az előbbiek szerint:

$$dT = +\frac{\sigma}{2\pi} a \cdot I_\nu^2 \cdot \frac{1}{x} \ln\frac{x}{r} \cdot dx$$

hőfokemelkedést, az egész szigetelésben pedig

$$\tau_2 = T''_R - T''_r = +\frac{\sigma}{2\pi} I_\nu^2 \cdot a \cdot \int_r^R \ln\frac{x}{r} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\sigma}{2\pi} I_\nu^2 a \cdot \int_{u=0}^{\ln\frac{R}{r}} u \cdot du = \frac{\sigma}{4\pi} \cdot I_\nu^2 \cdot a \left(\ln\frac{R}{r}\right)^2$$

hőfokemelkedést hoz létre.

Itt I_v az ún. *veszteségi, szivárgási áram*. Emiatt a τ_1 hőfokesés helyett csak

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = (T'_r - T'_R) - (T''_R - T''_r) = (T'_r + T''_r) - (T'_R + T''_r) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi} \ln\frac{R}{r} \cdot \left[I^2 \cdot \varrho - I_\nu^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \ln\frac{R}{r}\right]$$

hőfokesés keletkezik a szigetelésben. E körülmény egyrészt növeli a kábelszigetelés hőigénybevételét, másrészt viszont erősíti a szigetelés és a talaj közötti hőátadást.

2. *A tiszta folyadéksúrlódás paralel és ferde csúszólapok között**.

A csapágykenés *Reynolds-féle* hidrodinamikai elmélete szerint a nyomás eloszlása a lapok közti rés mentén:

$$p(x) = \sigma \overset{*}{\eta} V \cdot \int \left[\frac{h^*}{h^3(x)} - \frac{1}{h^2(x)}\right] dx,$$

ahol $\overset{*}{\eta}$ a viszkozitási tényező, V a mozgó lap sebessége,

$$h^* = \frac{q}{\frac{V}{2}} \qquad \text{és} \qquad q = \int_0^n v(y) \cdot dy$$

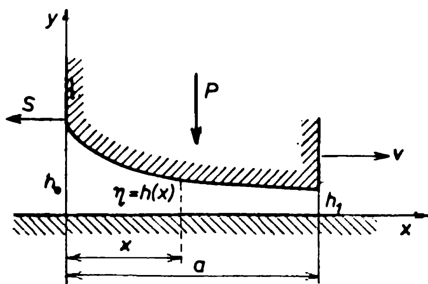
* L. Vörös: Csapágyak, szíjhajtások II. kötet. Hermann: Gépelemek.

a hosszegységnyi szélességű rés bármely keresztmetszetén az időegység alatt átömlő olaj térfogata; $\eta = h(x)$ adja a rés alakját. (Lásd a 23. ábrát!)

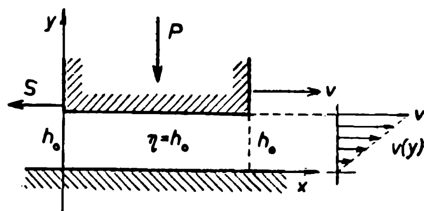
α) *Két paralel csúszólap* (l. a 24. ábrát):

$$\text{Ekkor} \quad \eta = h_0 \quad \text{és} \quad \frac{dp}{dx} = \sigma \overset{*}{\eta} V \left(\frac{h^*}{h_0^3} - \frac{1}{h_0^2} \right) = C_1,$$

tehát $p(x) = C_1 x + C_2$. Mivel $p(0) = p_0$ és $p(a) = p_0$, így $C_2 = p_0$ és $C_1 = 0$, azaz $p(x) = p_0 =$ $= \text{const}$ az egész rés mentén állandó.



23. *ábra*



24. *ábra*

Ha a felső (mozgó) lapnak a rajzlapra merőleges, igen nagynak feltételezett mérete b, terhelése pedig P, akkor $p_0 = \frac{P}{ab}$. *Paralel csúszólapok esetén tehát viszonylagos elmozdulásuk nem teszi hordképessé az olajfilmet; a p_0 nyomású olajat kívülről kell a résbe sajtolni!*

A csúsztató feszültség, *Newton* szerint (lamináris áramlásnál):

$\tau = \overset{*}{\eta} \frac{dv}{dy}$. Itt $v = V \frac{y}{h_0}$ lévén, $\tau = \overset{*}{\eta} \frac{V}{h_0}$ és a súrlódó erő így: $S = ab\overset{*}{\eta} \frac{V}{h_0}$; a súrlódási tényező pedig: $\frac{S}{P} = \mu = \frac{\overset{*}{\eta} V}{p_0 h_0}$.

β) *Ferde csúszólapok* (l. a 25. ábrát):

Ekkor a rés alakja a következő függvény görbéjével van megadva:

$$h - h_0 = \frac{h_1 - h_0}{a} x, \quad \text{ill.} \quad \frac{h}{h_0} = 1 + \frac{h_1 - h_0}{h_0} \cdot \frac{x}{a} = 1 + m \frac{x}{a}, \quad \text{ahol} \quad m = \frac{h_1 - h_0}{h}.$$

Behelyettesítve a $p(x)$ integrál-képletébe és kissé átrendezve, nyerjük:

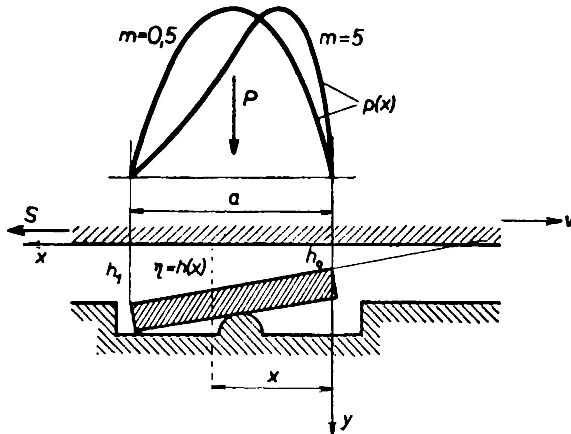
$$p(x) = \frac{\sigma \overset{*}{\eta} Va}{h_0^2} \int \left[\frac{h^*}{h_0} \cdot \frac{1}{\left(1 + m\frac{x}{a}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 + m\frac{x}{a}\right)^2} \right] d\left(\frac{x}{a}\right).$$

A (határozatlan) integrálást elvégezve, kapjuk:

$$p(x)=\frac{\sigma\overset{*}{\eta}Va}{h_0^2}\left[-\frac{h^*}{h_0}\frac{1}{2m\left(1+m\frac{x}{a}\right)}+\frac{1}{m\left(1+m\frac{x}{a}\right)}+C\right].$$

A $p(0)=0$ *kerületi feltétel*ből adódik:

$$0=\frac{\sigma\overset{*}{\eta}Va}{h_0^2}\left[-\frac{h^*}{h_0}\frac{1}{2m}+\frac{1}{m}+C\right]\quad \text{szerint}\quad C=\frac{1}{m}\left(\frac{h^*}{2h_0}-1\right).$$



25. ábra

A $p(a)=0$ másik kerületi feltételből pedig hasonló módon, némi átalakítás után nyerjük:

$$h^*=\frac{2h_0(1+m)}{2+m}\quad \text{és felhasználásával}\quad C=-\frac{1}{m(2+m)}.$$

Eszerint
$$\frac{h^*}{h}=\frac{2(1+m)}{2+m}=1+m\frac{x^*}{a},\quad \text{ahonnan}\quad \frac{x^*}{a}=\frac{1}{2+m}.$$

Ez $\left[\frac{dp}{dx}=\sigma\overset{*}{\eta}V\left(\frac{h^*}{h^3(x)}-\frac{1}{h^2(x)}\right)=0,\ \text{ha}\ h(x)=h^*\ \text{értelmében}\right]$ *a maximális nyomás helye*, mely láthatóan csak az $m=\frac{h_1-h_0}{h_0}$-tól függ!

Az előbb meghatározott h^*-et és C-t a $p(x)$ kifejezésbe visszahelyettesítve, nyerjük kis átalakítás után:

$$p(x)=\frac{\sigma\overset{*}{\eta}Va}{h_0^2}\cdot\frac{m\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)}{(m+2)\left(1+m\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sigma\eta Va}{h_0^2}\cdot F\left(\frac{x}{a}\right).$$

E formulával tehát adott kenőanyag (η^*), adott résjellemzők (a, h_0, m) és adott V (csap-) sebesség esetén a *résbeli nyomáseloszlás* teljesen meg van határozva!

A résbeli nyomáseloszlás birtokában meghatározható a *lebegésben tartott függélyes terhelés:*

$$\frac{P}{b}=\int_{x=0}^{a} p(x)\,dx=\frac{\sigma\eta V a^2}{h_0^2}\int_{\frac{x}{a}=0}^{1} F\left(\frac{x}{a}\right)d\left(\frac{x}{a}\right).$$

Minthogy $\left(\frac{x}{a}=t\right.$ jelöléssel$\left.\right)$ az integrálandó

$$\frac{mt(1-t)}{(m+2)(1+mt)^2}=\frac{1}{m+2}\,\frac{t(m+1)-t(1+mt)}{(1+mt)^2}=$$

$$=\frac{m+1}{(m+2)m}\,\frac{(1+mt)-1}{(1+mt)^2}-\frac{1}{(m+2)m}\,\frac{(1+mt)-1}{1+mt}=$$

$$=\frac{m+1}{(m+2)m}\left[\frac{1}{1+mt}-\frac{1}{(1+mt)^2}\right]-\frac{1}{(m+2)m}\left[1-\frac{1}{1+mt}\right]=$$

$$=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{1+mt}-\frac{m+1}{(m+2)m}\cdot\frac{1}{(1+mt)^2}-\frac{1}{(m+2)m}$$

módon átalakítható, így az integrál értéke:

$$\frac{P}{b}=\frac{\sigma\overset{*}{\eta}Va^2}{h_0^2}\left[\frac{1}{m^2}\ln\left(1+m\frac{x}{a}\right)+\frac{m+1}{(m+2)m^2}\,\frac{1}{1+m\frac{x}{a}}-\frac{1}{(m+2)m}\,\frac{x}{a}\right]_{\frac{x}{a}=0}^{\frac{x}{a}=1}=$$

$$=\frac{P}{b}\,\frac{\sigma\overset{*}{\eta}Va^2}{h_0^2}\left[\frac{1}{m^2}\ln(1+m)-\frac{2}{m(m+2)}\right].$$

A nyert eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy *ferde csúszólapok esetén a függélyes terhelés lebegtetése az olaj mesterséges besajtolása nélkül is lehetséges, mert a lapok viszonylagos elmozdulása következtében a résben az olaj hordképessé válik.*

E megállapítás gyakorlati szempontból nagyjelentőségű; *Michell,* a róla elnevezett *blokk*-talpcsapágyban meg is valósította.

A $\frac{P}{b}$ függélyes terhelés e excentricitással jelentkezik az $x=\frac{a}{2}$ ordinátához képest; ez

$$\frac{P}{b}\left(\frac{a}{2}+e\right)=\int_{x=0}^{a} p(x)\cdot x\cdot dx$$

módon számítható. Igazoljuk, hogy a számítás eredménye:

$$\frac{e}{a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\left[\frac{\frac{m}{2}-\frac{m+1}{m+2}\ln(m+1)}{\ln(m+1)-\frac{2m}{m+2}}-1\right].$$

Figyeljük meg, hogy milyen nagy szerepet játszik ezen ízig-vérig műszaki probléma megoldásában az integrálszámítás!

3. *A félig körülzárt csúszócsap Gümbel-féle kenés elméletében** szerepel a következő integrál:

$$S_2=l\cdot r\frac{\eta\omega}{\psi}\int\limits_{\pi}^{\pi+\varphi_1}\frac{d\varphi}{1+\chi\cos\varphi},$$

ahol a φ-n kívül minden állandó. Igazolandó, hogy a megoldás:

$$S_2=l\cdot r\frac{\eta\omega}{\psi}\frac{2}{\sqrt{1-\chi^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\chi}{1+\chi}}\operatorname{tg}\frac{\pi+\varphi_1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right].$$

* Hermann: Gépelemek. Bp., 1924.

3. §. PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

a) Egyszerű parciális integrálás

E módszer, miként a helyettesítés első alakja, számos *függvényszorzat* integrálására képesít. (Általános szorzatintegrálási eljárás nem létezik!) – **Szabálya** így szól: *Ha az $u(x)v'(x)$ integrálandó $v'(x)$ tényezője az x bizonyos szakaszán folytonos, azaz ott $v(x)$ primitívje létezik, továbbá az $u(x)$ tényező $u'(x)$ deriváltja ott szintén folytonos, azaz a $v(x)u'(x)$ szorzatnak ott van határozatlan integrálja, – akkor ugyanezt mondhatjuk az $u(x)v'(x)$ integrálandóról is.* Betűkkel:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.}$$

Csak néhány integráltípusnál tudjuk előre megjelölni, hogy *melyik tényezőt választjuk* $u(x)$-nek, ill. $v'(x)$-nek; egyébként ezt esetenként kell eldönteni! – Természetesen e módszert csakis akkor érdemes alkalmazni, ha az $\int v'(x)\,dx$ és $\int v(x)u'(x)\,dx$ közvetlenül, ill. *az eredetinél egyszerűbben* megoldható.

E módszer a szorzat differenciálási szabálya megfordításából adódik, így:

$$d(uv) = u'v\,dx + uv'\,dx, \qquad \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

Nézzük a fenti módszerrel megoldandó főbb integráltípusokat!

α) $$\int x \begin{Bmatrix} e^{mx} \\ \sin mx \\ \cos mx \\ \operatorname{sh} mx \\ \operatorname{ch} mx \end{Bmatrix} dx$$ Itt $u(x) = x,\quad v'(x) = \begin{Bmatrix} e^{mx} \\ \sin mx \\ \cos mx \\ \operatorname{sh} mx \\ \operatorname{ch} mx \end{Bmatrix}$;

$u'(x) = 1,\quad v(x) = \frac{1}{m}\cdot\begin{Bmatrix} e^{mx} \\ \cos mx \\ \sin mx \\ \operatorname{ch} mx \\ \operatorname{sh} mx \end{Bmatrix}$, vagyis az $u'(x)\cdot v(x)$ közvetlenül integrálható.

β) $\int \left\{\begin{matrix} \ln x \\ \text{arc} \ldots x \\ \text{ar} \ldots x \end{matrix}\right\} dx$

vagyis az $\ln x$, az $\text{arc} \sin x$, $\text{arc} \cos x$, $\text{arc tg}\, x$, $\text{arc ctg}\, x$, továbbá az $\text{ar sh}\, x$, $\text{ar ch}\, x$, $\text{ar th}\, x$, $\text{arc th}\, x$ függvények integrálása. Ezeknél:

$$u(x)=\left\{\begin{matrix} \ln x \\ \text{arc} \ldots x \\ \text{ar} \ldots x \end{matrix}\right\}, \quad v'(x)=1 \quad \text{és} \quad u'(x)=\left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{x} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \pm\dfrac{1}{1+x^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}, \quad \dfrac{1}{1-x^2} \end{matrix}\right\}, \quad v(x)=x,$$

tehát az $\int u'(x)v(x)\,dx$ integrálok $[(\pm 1 \pm x^2)' = \pm 2x$ lévén$]$ egyszerű helyettesítéssel megoldhatók.

γ) $\int x^n \left\{\begin{matrix} \ln x \\ \text{arc} \ldots x \\ \text{ar} \ldots x \end{matrix}\right\} dx$

Itt ismét $u(x)=\left\{\begin{matrix} \ln x \\ \text{arc} \ldots x \\ \text{ar} \ldots x \end{matrix}\right\}$ és $v'(x)=x^n$; $n \neq -1$ egész. Ha $u(x)=\ln x$, akkor a $v(x)\cdot u'(x)$ integrandus $=\dfrac{1}{n+1}x^n$. Viszont az $\text{arc} \ldots x$, $\text{ar} \ldots x$ esetén a $v(x)u'(x)=\pm\dfrac{1}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{\pm 1 \pm x^2}}$, ill. $\pm\dfrac{1}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{\pm 1 \pm x^2}$ függvények valamelyike; ezek integrálásával a racionális és irracionális függvények körében foglalkozunk bővebben!

δ) **Különféle integrálandók**

Főleg inverz (arc, ar, ln) *függvényeket tartalmazó szorzatok,* integrálását tanulmányozzuk itt! L. a példákat!

Példák és feladatok

α

1. $\int x \sin x\, dx = ?$ – Itt $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$ és $u'(x)=1$ $v(x)=-\cos x$

Ezek felhasználásával:

$$I=-x\cos x+\int 1.\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

2. $\int xe^{-x}\,dx=?$ – Itt $u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$. Tehát: $I=-xe^{-x}+\int 1.\ e^{-x}\,dx=$ $=-e^{-x}(x+1)+C.$

3. $\int x\cos x\,dx=?$

4. $\int x\,\text{sh}\,x\,dx=?$

*5. $\int x\sin^2 x\,dx=?$

*6. $\int x(\text{ch}^2 x+\text{sh}^2 x)\,dx=?$

β 1. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = ?$ – Itt $u(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $v'(x) = 1$ és megfelelően $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $v(x) = x$. Tehát $I = x \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}\ln C(1+x^2)$.

2. $\int \arcsin x\,dx = ?$ – Itt $u(x) = \arcsin x$, $v'(x) = 1$ és $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $v(x) = x$. Ezekkel $I = x \arcsin x + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

3. $\int \arcsin(5x-1)\,dx = ?$ – Itt előbb $z = z(x) = 5x-1$ helyettesítéssel élünk, majd az $I = \dfrac{1}{5}\int \arcsin z\,dz$ integrált a 2. pl. módjára megoldjuk.

4. $\int \ln x\,dx = ?$ – Itt $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$. Folytassuk!

5. $\int \arccos x\,dx = ?$

6. $\int \operatorname{arc\,tg}(3x+1)\,dx = ?$

7. $\int \operatorname{ar\,th} 3x\,dx = ?$

8. $\int \operatorname{ar\,sh}(2-5x)\,dx = ?$

*9. $\int \ln(7x-3)^2\,dx = ?$

*10. $\int \ln\dfrac{2x+5}{3-x}\,dx = ?$

*11. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = ?$ – Írjuk fel az integrálandót más alakban!

*12. $\int \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx = ?$ – Mint előbb!

*13. $\int \dfrac{\ln\ln x}{x}\,dx = ?$ – Előbb $z = \ln x$ helyettesítés!

*14. $\int \ln(1+x^2)\,dx = ?$ – Itt $u(x) = \ln(1+x^2)$, $v'(x) = 1$; felhasználandó az $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ azonosság!

*15. $\int \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{x}\,dx = ?$ – Itt $u(x) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{x}$, $v'(x) = 1$.

γ 1. $\int x^3 \ln x\,dx = ?$ – Itt $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x^3$ és

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \dfrac{x^4}{4}$. Így $I = \dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{1}{4}\int \dfrac{x^4}{x}\,dx = \dfrac{x^4}{4}\left(\ln x - \dfrac{1}{4}\right) + C$.

2. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx = ?$ – Itt $u(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $v'(x) = x$ választással

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + C.$$

3. $\int x \arcsin x\, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ez utóbbi $x = \sin u$ helyettesítéssel így alakul: $-\frac{1}{2}\int \sin^2 u\, du = -\frac{u}{4}\,\frac{\sin 2u}{8} + C$. A végeredmény:

$$I = \frac{2x^2-1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$$

4. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx = ?$

5. $\int \frac{\ln x}{x^4}\, dx = ?$

6. $\int x^n \ln x\, dx = ?$ $(n \neq -1)$

*7. $\int x^2 \ln (1+x)\, dx = ?$

8. $\int x \operatorname{ar\,th} x\, dx = ?$

9. $\int x \ln (x + \sqrt{1+x^2})\, dx$

10. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\, dx = ?$

11. $\int x^7 \operatorname{arc\,tg} x\, dx = ?$

*12. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.
Tovább $x = \sin u$ helyettesítéssel!

*13. $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx = ?$ – Előbb $u = \sqrt{x}$ helyettesítés, majd a 2. pl. szerint!

*14. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}}{x^2}\, dx = ?$ – Az $u = \sqrt{x}$ helyettesítés $\frac{1+u^2-u^2}{u^2(1+u^2)}$ integrálásra vezet.

*15. $\int \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} x\, dx = ?$ – Az $u(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $v'(x) = \sqrt{x}$ választással $\int \frac{x^{3/2}\, dx}{1+x^2}$ integrálra, ebből pedig $z = x^{1/2}$ helyettesítéssel $\int \frac{z^4+1-1}{z^4+1}\, dz$ integrálra jutunk. Ez utóbbit a 4. §. c. γ_3) – 11. példa szerint oldjuk meg.

*16. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \operatorname{arc\,tg} x\, dx = ?$ – Az előző három példa alapján oldjuk meg!

δ | 1. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ – Itt $u(x) = x$, $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ és $u'(x) = 1$,

$$v(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.\ \text{Így}\ I = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Ez utóbbi integrál $\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x - I$ alakban is írható.

Rendezés után nyerjük végül: $I=\frac{1}{2}[\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}]+C$. – Az α_2) 3. példában ezt az integrált $x=\sin u$ helyettesítéssel oldottuk meg!

2. $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}}dx=?$ – Itt $u(x)=\operatorname{arc\,tg} x$, $v'(x)=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ választás előnyös.

Ezzel: $I=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x-\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{ar\,sh} x+C.$

*3. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=?$ – Előbb $z=\sqrt{x}$ helyettesítés: $I=\frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\arcsin z\,dz$,

majd $u=\arcsin z$, $v'=\frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}$ választással parciális integrálás:

$$I=-2\sqrt{1-z^2}\arcsin z+2\int\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}dx=2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C.$$

4. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=?$

5. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}=?$

6. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx=?$

7. $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=?$

*8. $\int\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx=?$

9. $\int(\arcsin x)^2\,dx=?$

10. $\int\frac{x^2\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx=?$

11. $\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx=?$

*12. $\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2(1+x^2)}dx=?$ – Itt $z=\operatorname{arc\,tg} x$, $x=\operatorname{tg} z$, $dx=\frac{dz}{\cos^2 z}$ helyettesítéssel: $I=\int\frac{z}{\operatorname{tg}^2 z}dz=\int z\frac{\cos^2 z+\sin^2 z-\sin^2 z}{\sin^2 z}dz=\int\frac{z\,dz}{\sin^2 z}-\int z\,dz.$

Folytassuk!

ε | Vegyes gyakorló feladatok az egész α-hoz. Lásd a 3. §. *b.* *η*) alatt!

b) Rekurzív képletek

Gyakran előfordul, hogy a parciális integrálás egyszeri alkalmazása nem vezet közvetlenül megoldható alapintegrálra, hanem az eredetihez hasonló típusú, de alacsonyabb paraméterű, indexű integrálra. Ilyenkor a parciális integrálást ismételjük mindaddig, amíg valamelyik alapintegrálra (esetleg az eredeti integrál konstansszorosára) nem jutunk. Az ilyen eljárást nevezzük *rekurzív eljárásnak.* – Ha ez pl. *n* lépésből áll, akkor írható:

$$\int uv^{(n+1)}dx=uv^{(n)}-\int u'v^{(n)}dx=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+\int u''v^{(n-1)}dx=\ldots=$$
$$=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\ldots+(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx.$$

E hosszadalmas differenciálási és integrálási teendők helyett, adott (paraméterű) példa megoldására leginkább általános (n paraméterrel dolgozó) **rekurzív képletet** alkalmazunk, amely *hasonló típusú, de különböző paraméterű integrálok között ad kapcsolatot.* (E képletek rendszerint egyszeri integrálás és megfelelő átrendezés eredményeként adódnak.) – Jegyezzük meg, hogy mely integráltípusoknál rendelkezünk egyszerűbb rekurzív képletekkel, és sajátítsuk el ezek gyors használatát! Figyeljük meg továbbá, hogy hol adódik a rekurziónál előnyösebb eljárás!

α) $$\int x^n \begin{Bmatrix} e^{mx} \\ \sin mx \\ \cos mx \\ \text{sh}\, mx \\ \text{ch}\, mx \end{Bmatrix} dx$$

Itt $n=2, 3, \ldots$; az $n=1$ esetet már láttuk az α_1)-ben! A rekurzív eljárás n lépésből (a parc. integrálás n-szeri alkalmazásából) áll, miközben mindig az egyre csökkenő fokszámú hatványt választjuk $u(x)$-nek, a másik tényezőt pedig $v'(x)$-nek. Az $[x^n]^{(n)}=n!=\text{const}$ lévén, végül valamelyik alapintegrál konstans-szorosára jutunk.

β) $$\int x^k \cdot \ln^n x\, dx$$

Az n pozitív és $k \neq -1$ egész; az $n=1$ esetet már láttuk az α_3)-ban! Itt $(n-1)$ lépésből álló rekurzív eljárás szükséges, amelynek során a hatványfüggvényt mindig $v'(x)$-nek, a logaritmus függvényt mindig $u(x)$-nek választva, x^k változatlan marad $\left[(\ln x)=\frac{1}{x} \text{ miatt}\right]$, az $\ln^n x$ kitevője lépésenként eggyel csökken, s így végül az α_2)-ben tárgyalt $\int x^k \ln x\, dx$ integráltípusra jutunk.

Sokkal gyorsabb (az egyszeri parciális integrálásból adódó) *rekurzív képlettel* dolgozni:

$$I_{k,n}=\int \underset{v'}{x^k} \underset{u}{\ln^n x}\, du=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^n x-\frac{n}{k+1}\int x^k \ln^{n-1} x\, dx$$

$$\boxed{I_{k,n}=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln^n x-\frac{n}{k+1}I_{k,n-1}.}$$

γ) $$\int \cos^n x\, dx, \quad \int \sin^n x\, dx$$

Az n egynél nagyobb pozitív egész. Ha $n=2k+1$ (páratlan), egyszerűbb az *a*) α_4) alatt ismertetett helyettesítés. Páros, $n=2k$ esetén az ún. *lehasító módszert* alkalmazzuk, azaz pl. $\cos^n x$ esetén $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$ felfogásban $u(x)=\cos^{n-1} x$, $\cos x = v'(x)$ választással rekurzív eljárást kezdünk:

$$C_n=\int \cos^n x\, dx=\int \cos^{n-1} x \cdot \cos x\, dx=$$

$$=\cos^{n-1} x \cdot \sin x+(n-1)\int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x\, dx.$$

Ez utóbbi tag $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ lévén

$$(n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx-(n-1)\int \cos^n x\, dx$$

alakban írható. Látható, hogy fellépett az eredeti integrál konstans-szorosa, ami az eredetivel összevonható, továbbá az eredetihez hasonló típusú, de kettővel csökkent paraméterű integrál. Ez utóbbin, a fenti lehasító felfogásban folytatjuk az eljárást, mígnem a $C_2 = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos^2 x)\,dx$ elemi integrálhoz nem jutunk.

Gyorsabban célt érünk, ha az előbbi számítás alapján felírható *rekurzív képletet* használjuk:

$$C_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} C_{n-2}, \qquad n \neq 0.$$

Hasonlóan nyerhető az $S_n = \int \sin^n x\,dx$-re:

$$S_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} S_{n-2}, \qquad n \neq 0.$$

E képletek csupán pozitív egész $n > 1$ esetén vezetnek zárt alakra. Maga $C_0 = S_0 = \int 1 \cdot dx = x + C$. Hasonló jellegű formulák vezethetők le a megfelelő hiperbolikus integrálokra. — A későbbiekben e formulák alapján rokontípus integrálok rekurzív képleteit fogjuk előállítani.

δ) $\int e^{ax} \left\{ \begin{matrix} \cos bx \\ \sin bx \end{matrix} \right\} dx$

Legcélszerűbb, a két lehetséges $u(x)$ és $v'(x)$ választással, *párhuzamosan két parciális integrálást* végezni. Pl.:

$$\int \underset{u}{e^{ax}} \cdot \underset{v'}{\cos bx}\,dx = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \cdot \sin bx\,dx \quad \Big| \cdot \frac{b}{a}$$

$$\int \underset{v'}{e^{ax}} \cdot \underset{u}{\cos bx}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \cdot \sin bx\,dx \quad \Big| \cdot \frac{a}{b}$$

A feltüntetett szorzásokat elvégezve, a két sort összeadva és rendezve nyerjük:

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx\,dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + C,$$

$\left(\text{mert a két } \int e^{ax} \sin bx\,dx \text{ határozatlan integrál, mint függvénysereg különbsége } C\right)$.
Hasonlóan nyerhető:

$$\int e^{ax} \cdot \sin bx\,dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + C.$$

Megjegyzendő, hogy *kétlépéses rekurzív eljárással* is célt érünk, ha mindkétszer ugyanolyan értelemben választjuk az e^{ax}-et! (Komplex úton is eljárhatunk!)

ε) $\int x^n e^{ax} \begin{Bmatrix} \cos bx \\ \sin bx \end{Bmatrix} dx$

Itt n-lépéses rekurzió folyamán az x^n kitevőjét ismételt deriválással 0-ra fogyasztjuk, ugyanekkor az $e^{ax} \begin{Bmatrix} \cos bx \\ \sin bx \end{Bmatrix}$ alakú kifejezések ismételt integrálását a fentebbi formulák segítségével nehézség nélkül elvégezhetjük. (Itt is előnyös a komplex út!)

ζ) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

Az $n = 1, 2, 3, \ldots$
Keressünk rekurzív formulát e fontos, a racionális függvények integrálásánál gyakran előforduló integrál részére!

Legyen

$$u(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad v'(x) = 1 \quad \text{és} \quad u'(x) = -\frac{2n\,x}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v(x) = x;$$

akkor

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

Az utóbbi integrált célszerűbb alakba írjuk:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \cdot dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = I_n - a^2 \cdot I_{n+1}.$$

Visszahelyettesítve:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,I_n - 2n\,a^2 \cdot I_{n+1}$$

adódik, amelyből rendezéssel nyerhető a keresett rekurziós képlet:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n.$$

Állítsuk elő még, a későbbiek számára az I_2-t és I_3-t, felhasználva az $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$ eredményt. Ezzel:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,$$

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \cdot I_2 = \frac{1}{4a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

A későbbiekben még számos integráltípusnál találkozunk rekurzióval!

Példák és feladatok

α

1. $\int x^2 e^{3x}\,dx = ?$

Az első lépésben $u_1(x) = x^2$. $v_1'(x) = e^{3x}$ és $I = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\,dx$.

A második lépésben $u_2(x) = x$, $v_2'(x) = e^{3x}$ választással az utolsó tag, $\left(-\frac{2}{3} I_1\right)$ így alakul: $\frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\right)$.

Végeredményben: $I = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right) e^{3x} + C$.

2. $\int x^2 \sin x\,dx = ?$

Első lépés: $u_1 = x^2$, $v_1' = \sin x$ és $I = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$.
Második lépés: $u_2(x) = x$, $v_2'(x) = \cos x$ és $2\,I_1 = 2\,(x \sin x + \cos x) + C$.
Tehát $I = -x^2 \cos x + 2\,(x \sin x + \cos x) + C$.

*3. $\int e^x x^n\,dx = ?$ – Minthogy az e^x integráljait és az x^n deriváltjait könnyen előállíthatjuk, az elméleti összefoglalóban megadott képlet alapján azonnal felírhatjuk az $u = x^n$, $v^{(n+1)} = e^x$ választásból kiinduló rekurzív eljárás *végeredményét:*

$$I = e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - + \ldots + - 1)^n \cdot n!] + C.$$

4. $\int x^2 \cos kx\,dx = ?$

5. $\int x^2 \cos^2 x\,dx = ?$

6. $\int x^3 \sin x\,dx = ?$

7. $\int x^2 e^{-x}\,dx = ?$

8. $\int x^3 e^{2x}\,dx = ?$

9. $\int x^2 a^x\,dx = ?$

10. $\int x^2 \,\mathrm{sh}\, x\,dx = ?$

11. $\int x^2 \,\mathrm{ch}\, kx\,dx = ?$

12. $\int x^2(\mathrm{ch}\, 3x + \mathrm{sh}\, 3x)\,dx = ?$

13. $\int x^3 \frac{e^{3x}}{\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x}\,dx = ?$

14. $\int x^2(\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x)\,dx = ?$

15. $\int e^{-x} x^n\,dx = ?$

16. $\int P_n(x) e^{ax}\,dx = ?$

[$P_n(x)$ n.-fokú polinom]

17. $\int P_n(x) \sin bx\,dx = ?$

*18. $\int x^5 e^{-x^2}\,dx = ?$ – Itt $z = x^2$ helyettesítéssel az $I = \frac{1}{2}\int z^2 e^{-z}\,dz$ alakra jutunk. Folytassuk!

19. $\int x^5 \operatorname{sh} x^2\, dx = ?$ – Az előbbi helyettesítéssel! [L. a 10. feladatot!]

***20.** $\int \frac{x(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = ?$ – Helyettesítés: $z = \arcsin x$; ezzel $I = \int z^2 \sin z\, dz$. L. a 2. példát!

***21.** $\int \sin \sqrt[3]{x}\, dx = ?$ – A $z = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel $I = 3\int x^2 \sin z\, dz$ alakra jutunk!

β **1.** $\int x \ln^2 x \cdot dx = ?$

Itt az első lépésben $u_1(x) = \ln^2 x$, $v_1'(x) = x$ és $I = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{2}{2}\int \frac{x^2}{x} \ln x\, dx$.

Az utóbbi tag, $(-I_1)$ a második lépésben, $u_2(x) = \ln x$, $v_2'(x) = x$ választás mellett, így alakul: $-I_1 = -\frac{x^2}{x} \ln x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}\, dx$.

Végeredményben: $I = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$.

***2.** $\int x^3 \ln^2 x\, dx = ?$ Oldjuk meg e feladatot a megadott rekurzív formula segítségével! – Esetünkben $k = 3$, $n = 2$. Tehát:

$$I_{3,2} = \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{2}{4} I_{3,1} = \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} I_{3,0}\right].$$

Az $\quad I_{k,0} = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C_1 \quad$ lévén,

írhatjuk végül:

$$I_{3,2} = \frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8}\right) + C_2.$$

3. $\int \ln^2 x\, dx = ?$

4. $\int \ln^n x\, dx = ?$

5. $\int \ln^2 (ax+b)\, dx = ?$

6. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\, dx = ?$

γ **1.** $\int \sin^4 x\, dx = ?$ – A lehasító módszert alkalmazzuk, $\sin^3 x \cdot \sin x$ felfogásban, $u(x) = \sin^3 x$, $v'(x) = \sin x$ választással: $I = -\sin^3 x \cdot \cos x + 3\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$. A $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ azonosság felhasználásával:

$$I = -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx =$$

$$= -\sin^3 x \cos x + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} \sin 2x + C_1 - 3I.$$

Ebből: $$4I = -\sin^3 x \cos x + \frac{3}{2} x - \frac{3}{2} \sin x \cos x + C_1,$$

s végül: $$I = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + C_2.$$

2. $\int \cos^4 x\, dx = ?$ **Végezzük el az integrálást a megadott rekurzív képlet segítségével!**

$I = C_4 = \dfrac{\sin^3 x \cos x}{4} + \dfrac{3}{4} C_2$. A formulát újra alkalmazva a C_2-re, nyerjük végül:

$$I = \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C.$$

3. $\int \sin^6 x\, dx = ?$

4. $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = ?$

5. $\int \operatorname{ch}^4 x\, dx = ?$

6. $\int \operatorname{sh}^6 x\, dx = ?$

***7.** $\int \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^4 dx = ?$ – Megjegyzés: $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$.

***8.** $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} = ?$ – Megjegyzés: $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

***9.** $\int \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2} dx = ?$ – Felhasználandó a $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$

és $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ azonosság!

***10.** $\int \cos^4 (3x - 5)\, dx = ?$ – A **2.** pl. és a 2. § a. α) felhasználásával.

***11.** $\int \sin^4 (3 - 5x)\, dx = ?$ – Mint előbb!

[Ilyen típusú példák találhatók még 6. § a. β) alatt!]

δ | **1.** $\int e^{2x} \cos 3x\, dx = ?$ – A két lehetséges $u(x)$ és $v'(x)$ választással, párhuzamosan két parciális integrálást végzünk:

$$I = \int \underbrace{e^{2x}}_{u} \underbrace{\cos 3x}_{v'}\, dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x\, dx \quad \Big| \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \int \underbrace{e^{2x}}_{v'} \underbrace{\cos 3x}_{u}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x\, dx \quad \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

A feltüntetett szorzásokat elvégezve, majd a két sort összeadva nyerjük:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right) I=\frac{13}{6} I=\frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x+\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x+C_1.$$

Végül rendezés után lesz:

$$I=\frac{e^{2x}}{13}(3 \sin 3x+2 \cos 3x)+C.$$

Ugyanezen eredményt a megadott formula alapján közvetlenül felírhatjuk!

2. $\int e^x \cos x\, dx= ?$ – Most végezzük az integrálást kétlépéses rekurzív eljárással, pl. mindkét lépésben $v'(x)=e^x$ választással:

$$I=\int \underbrace{e^x}_{v_1'} \underbrace{\cos x}_{u_1} dx=e^x \cos x+\int \underbrace{e^x}_{v_2'} \underbrace{\sin x}_{u_2} dx=e^x \cos x+e^x \sin x-I.$$

Végül rendezve, ez adódik: $I=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C$. – Ha esetünkben a 2. lépésnél ellenkező, azaz $u_2=e^x$, $v_2'=\sin x$ választással dolgoztunk volna, akkor az $I=e^x \cos x-e^x \cos x+$ $+I$ semmitmondó eredményre jutottunk volna.

3. $\int e^{-x} \operatorname{ch} 2x\, dx= ?$ – Számíthatjuk az 1., vagy 2. mintájára is, de egyszerűbb $\operatorname{ch} 2x=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$ alapján áttérni az exponenciális alakra! (L. hátul!)

4. $\int e^{-x} \sin x\, dx= ?$

5. $\int e^{5x} \cos 4x\, dx= ?$

6. $\int e^{-2x} \sin 3x\, dx= ?$

7. $\int e^{-x} \operatorname{sh} x\, dx= ?$

8. $\int e^{2x} \operatorname{ch} 3x\, dx= ?$

*9. $\int \operatorname{ch} x \cos 5x\, dx= ?$ (L. hátul)

10. $\int e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)\, dx= ?$

*11. $\int e^x \sin^2 x\, dx= ?$ (L. hátul!)

*12. $\int e^{3 \arcsin x} dx= ?$ – Az $u=\arcsin x \quad x=\sin u \quad dx=\cos u\, du$ helyettesítéssel az $I=\int e^{3u} \cos u\, du$ integrálra jutunk!

*13. $\int \sin \ln x\, dx= ?$ – Itt az $u=\ln x$, $x=e^u$, $dx=e^u\, du$ helyettesítés az $I=\int e^u \sin u\, du$ alakra vezet.

*14. $\int \cos \ln x\, dx= ?$ – Az előbbi helyettesítéssel!

*15. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx = ?$ – L. az 1. feladatot! Most oldjuk meg komplex úton,
$I = Re\left[\int e^{2x} \cos 3x \, dx + i \int e^{2x} \sin 3x \, dx\right] = Re \int e^{2x} (\cos 3x + i \sin 3x) \, dx = Re \int e^{(2+3i)x} \, dx$
felfogásban! (L. hátul!)

ε | 1. $\int x^2 e^{2x} \cos 4x \, dx = ?$ – Az első lépésben $u_1(x) = x^2$, $v_1'(x) = e^{2x} \cos 4x$ és megfelelően $u_1'(x) = 2x$, $v_1(x) = \frac{e^{2x}}{20} (4 \sin 4x + 2 \cos 4x)$, tehát

$$I = \underbrace{\frac{x^2}{20} e^{2x} (4 \sin 4x + 2 \cos 4x)}_{I_1} \underbrace{- \frac{2}{5} \int x e^{2x} \sin 4x \, dx}_{-\frac{2}{5} I_a} \underbrace{- \frac{1}{5} \int x e^{2x} \cos 4x \, dx}_{-\frac{1}{5} I_b}.$$

Az utóbbi két tagban egyaránt $u_2(x) = x$ választással, valamint a β_4)-beli képletek ismételt alkalmazásával kezdjük a rekurzió 2. lépését:

$$-\frac{2}{5} I_a = -\frac{1}{50} x e^{2x} (2 \sin 4x - 4 \cos 2x) + \frac{1}{25} \frac{1}{20} e^{2x} (2 \sin 4x - 4 \cos 2x) -$$

$$-\frac{2}{25} \frac{1}{20} e^{2x} (4 \sin 4x + 2 \cos 4x), \quad \text{továbbá} \quad -\frac{1}{5} I_b = -\frac{1}{100} x e^{2x} (4 \sin 4x +$$

$$+ 2 \cos 4x) + \frac{1}{25} \frac{1}{20} e^{2x} (2 \sin 4x - 4 \cos 2x) - \frac{1}{50} \frac{1}{20} e^{2x} (4 \sin 4x + 2 \cos 4x).$$

Rendezés után végül ez adódik:

$$I = I_1 - \frac{2}{5} I_a - \frac{1}{5} I_b = \frac{e^{2x}}{20} \left[x^2 (4 \sin 4x + 2 \cos 4x) - \frac{x}{5} (8 \sin 4x - 6 \cos 4x) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{25} (6 \sin 4x + 13 \cos 4x)\right] + C.$$

2. $\int x^2 e^x \sin x \, dx = ?$ 3. $\int x^2 e^x \cos x \, dx = ?$

*4. Oldjuk meg a 3. feladatot komplex úton, $I = Re \int x^2 e^{(1+i)x} \, dx$ felfogásban! (L. hátul!)

ζ | 1. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = ?$ Írjuk fel az eredményt a megadott rekurzív formula segítségével! – Közvetlenül az I_2 formulát használva, írhatjuk:

$$I_2 = \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} + C.$$

Megjegyzendő, hogy az $x = 2 \operatorname{tg} u$ helyettesítés is célravezető; vele $I = \frac{1}{8}\int \cos^2 u \, du$ alakra jutunk! Lásd az a. β_1) alatt a 7. példát!

2. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = ?$ – Átalakítás: $I = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{[(2x-3)^2+25]^2}$, majd $u = 2x-3$, $du = 2\,dx$ helyettesítés: $I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2+5^2)^2}$. Az I_2 formula alkalmazásával, majd visszahelyettesítéssel nyerjük végül: $I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{50}\,\frac{2x-3}{4x^2-12x+34} + \frac{1}{250}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{5}\right] + C.$

3. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} = ?$

4. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3} = ?$

5. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^4} = ?$

6. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = ?$

7. $\int \frac{dx}{(16x^2-24x+13)^2} = ?$

8. $\int \frac{dx}{(4x^3-12x+10)^3} = ?$

*9. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)^3} = ?$ – Átalakítás: $I = \int \frac{x^2+9-9}{(x^2+9)^3}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2+9)^2} - 9\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

Tovább az I_2 és I_3 formula segítségével!

η | *Vegyes gyakorló feladatok az egész 3. §-hoz.*

1. $\int \ln(x+a)\,dx = ?$

2. $\int x^2 \cos x\,dx = ?$

3. $\int e^{2x}x^3\,dx = ?$

4. $\int \frac{\ln(\operatorname{arc\,tg} x)}{1+x^2}\,dx = ?$

5. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1+x)^2} = ?$

6. $\int (1-x-x^2)\cos 3x\,dx = ?$

7. $\int x^5 \operatorname{arc\,tg} x\,dx = ?$

8. $\int (\arcsin x)^2\,dx = ?$

9. $\int e^x \cos^2 x\,dx = ?$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = ?$

11. $\int x^2 \sin 2x \, dx = ?$

12. $\int x^5 e^{x^3} \, dx = ?$

13. $\int x(\operatorname{arc\,tg} x)^2 \, dx = ?$

14. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} \, dx = ?$

15. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2} \, dx = ?$

16. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx = ?$

17. $\int x \sin \sqrt{x} \, dx = ?$

18. $\int \frac{x e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx = ?$

19. $\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx = ?$

20. $\int x^2 \arccos x \, dx = ?$

21. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x \, dx = ?$

22. $\int \ln (x+\sqrt{1+x^2}) \, dx = ?$

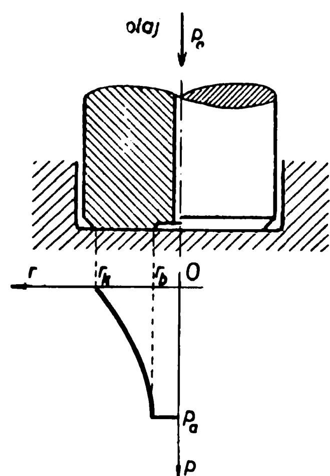
23. $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx = ?$

24. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = ?$

Műszaki alkalmazások

1. *A talpcsapágy-kenés hordképessége.** (L. a 26. ábrát!)

A csapágykenés hidrodinamikai elméletének feltevése szerint, a talpcsap alatti olajrétegben a *nyomás eloszlása* a sugár függvényében:



26. *ábra*

$$p = p_a \frac{\ln \frac{r_k}{r}}{\ln \frac{r_k}{r_b}},$$

ahol p_a a talpcsap véglapjának közepére nyomott olajra vonatkozik; látható továbbá, hogy $p(r_k) = 0$.

Egy tetszőleges $r_b \leq r \leq r_k$ sugarú, dr szélességű gyűrűszerű olajréteg *hordképessége:*

$$dP = 2r\pi \cdot dr \cdot p = 2\pi p_a \frac{\ln \frac{r_k}{r}}{\ln \frac{r_k}{r_b}} \cdot r \cdot dr,$$

a talpcsap alatti teljes olajréteg pedig:

$$P = p_a \cdot r_b^2 \pi + \frac{2\pi p_a}{\ln \frac{r_k}{r_b}} \int_{r_b}^{r_k} \underset{v'}{r} \cdot \underset{u}{\ln \frac{r_k}{r}} \cdot dr = p_a \cdot r_b^2 \pi +$$

* L. Vörös: Csapágyak, szíjhajtások II. kötet. Hermann: Gépelemek.

$$+\frac{2\pi p_a}{\ln \frac{r_k}{r_b}} \left[\frac{r^2}{2} \ln \frac{r_k}{r} - \int \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r}{r_k} \cdot \left(-\frac{r_k}{r^2} \right) dr \right]_{r_b}^{r_k} = p_a \cdot r_b^2 \pi + 0 - 2\pi\, p_a \frac{r_b^2}{2} +$$

$$+\frac{\pi}{2} p_a \frac{r_k^2 - r_k^2}{\ln \frac{r_k}{r_b}} = p_a \frac{(r_k^2 - r_b^2)\pi}{\ln \frac{r_k^2}{r_b^2}} .$$

Az a) α_2) szerint végeztük az integrálást.

HARMADIK RÉSZ

RACIONÁLIS ÉS RACIONALIZÁLHATÓ INTEGRÁLOK

4. §. RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

a) Integrálás zárt alakban

Az integrálszámítás alapmódszereinek tanulmányozása után most rátérünk az integrálható függvények alaposztályainak, ill. főbb típusainak tárgyalására. **Integrálható**-*nak nevezzük* röviden (s a szó szűkebb értelmében) *azon függvényeket, amelyek határozatlan integrálja felépíthető* (az A. II-ben megismert) elemi függvényekből, az alapműveletek végesszámú alkalmazásával, tömörebben: *elemi függvényekből, zárt alakban.*

Előfordul, pl. az

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

integráloknál is, *hogy az elemi függvényekkel, zárt alakban kifejezhető integrálandó határozatlan integrálja* – noha létezik – nem adható meg hasonló módon, hanem új, nem elemi, ún. *speciális függvényekre vezet!* Ilyenekről a későbbiekben fogunk beszélni (L. az *A. V., B. VI.* kötetet!)

A (fenti értelemben) *integrálható függvények közül legfontosabb a* **racionális függvények** *osztálya!*

b) A legegyszerűbb racionális függvények integrálása

Ezek az eddigi ismeretek alapján integrálhatók. Begyakorlásuk nagyon fontos, mert a *c)* pontban ezekre támaszkodunk!

α) $\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\,dx$

A racionális egészfüggvény, v. polinom, mint véges függvénysor, tagonként integrálható. L. 1. § *b)* α – β.

β) $\int \frac{k\,dx}{ax+b}$

A 2. § *a.* α_2) szerint: $\int \frac{k\,dx}{ax+b} = \frac{k}{a} \ln C(ax+b).$

γ) $\int \frac{k\,dx}{(ax+b)^n}$

A 2. § *a.* α_1) szerint:

$$\int \frac{k\,dx}{(ax+b)^n} = \frac{k}{a(1-n)}\,\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C = k \int (ax+b)^{-n}\,dx.$$

E típusra vezet a következő is:

$$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{ax+b-b}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(ax+b)^{n-1}} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{(ax+d)^n}.$$

δ) $\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ A nevezőben levő másodfokú polinomokat ún. *normálalak*ra hozzuk:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x^2+px+q) = \alpha\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}\right) =$$

$$= \alpha\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right],$$

ahol $p=\frac{\beta}{\alpha}$, $q=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Most helyettesítsünk: $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$ és jelöljük:

$$q-\frac{p^2}{4} = \begin{cases} +a^2, & ha \quad q-\frac{p^2}{4}>0 \\ -, & ha \quad q-\frac{p^2}{4}=0 \\ -a^2, & ha \quad q-\frac{p^2}{4}<0 \end{cases}$$

Ezekkel a fenti integrál az

$$\frac{1}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2+a^2}, \quad \frac{1}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2}, \quad \frac{1}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{\alpha}\int\frac{dt}{(t+a)(t-a)}$$

alakok valamelyikébe megy át, amelyek primitív függvénye azonnal felírható. – A továbbiak szempontjából elsősorban $0<q-\frac{p^2}{4}=+a^2$ esetnek megfelelő $\frac{1}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2+a^2}$ átalakítás fontos. Ekkor az $x^2+px+q=0$ másodfokú egyenletnek konjugált komplex gyökei vannak; ún. *definit* polinomját – a komplex számok elkerülése céljából – nem szokták felbontani lineáris gyöktényezőkre!

ε) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ A $0<q-\frac{p^2}{4}=+a^2$ esetre szorítkozunk! Egyszerű átrendezéssel logaritmikus integrálra és az előbbi típusra vezetjük vissza. Helyettesítve $x=t-\frac{p}{2}$ és jelölve $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, nyerjük:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int\frac{Mt+N-\frac{p}{2}M}{t^2+a^2}\,dt = \frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} -$$

$$= \frac{M}{2} \ln (t^2 + a^2) + \frac{1}{a}\left(N - \frac{p}{2} M\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2} \ln (x^2 + px + q) + \frac{2N - pM}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

ζ) $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$ Elegendő a $0 < q - \frac{p^2}{4} = +a^2$ esetre szorítkoznunk: a $0 \geq q - \frac{p^2}{4}$ esetben ugyanis az alább ismertetendő részlettörtes eljárást szokás alkalmazni. Az előbbi helyettesítéssel és átrendezéssel:

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^n} dt =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2t\, dt}{(t^2 + a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} =$$

$$= \frac{M}{2} \frac{1}{1 - n} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n},$$

mely utóbbi integrál a 3. § *b.* β_6) alatti rekurzív formulával meghatározható [benne $(n+1)$ helyett n-et, n helyett $(n-1)$-et írva].

Példák és feladatok

α, β, γ | 1. $\int (x^3 - 4x^2 + 5x - 6)\, dx = ?$ – Mint tudjuk, az integrálás tagonként, kiemeléssel, hatványként történik:

$$I = \int x^3\, dx - 4 \int x^2\, dx + 5 \int x\, dx - 6 \int dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x + C.$$

Az eredményt közvetlenül is felírhatjuk!

2. $\int \frac{5\, dx}{4x - 3} = ?$ – Amint tanultuk, a határozatlan integrál a nevező logaritmusának konstans-szorosa:

$$I = \frac{5}{4} \int \frac{4\, dx}{4x - 3} = \frac{5}{4} \int \frac{d\,(4x - 3)}{4x - 3} = \frac{5}{4} \ln (4x - 3) + C = \ln k \sqrt[4]{(4x - 3)^5}\, .$$

3. $\int \frac{7\, dx}{(2x - 3)^5} = ?$ – A lineáris kifejezés függvényének integráljáról tanultak szerint:

$$I = \frac{7}{2} \int \frac{2\, dx}{(2x - 3)^5} = \frac{7}{2} \int \frac{d(2x - 3)}{(2x - 3)^5} = -\frac{7}{8(2x - 3)^4} + C.$$

4. $\int [3x^2-5+(x^2-1)(x^2+1)]\,dx=?$

5. $f(x)=3+x-5x^2,$
$\Phi_0(6)=F(6)+C_0=-200;$
$\Phi_0(x)=F(x)+C_0=?$
(Lásd hátul!)

6. $\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}\,dx=?$
(Lásd hátul!)

7. $\int \frac{dx}{4x-8}=?$

8. $\int \frac{3dx}{7-5x}=?$

9. $f(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2-t},$
$\Phi_0(1)=F(0)+C_0=0;$
$\Phi_0(t)=F(t)+C_0=?$

10. $\int \frac{x\,dx}{2x+5}=?$
(Lásd hátul!)

11. $\int \frac{dx}{(x-5)^4}=?$

12. $\int \frac{3dx}{(7x-4)^5}=?$

13. $\int \frac{x\,dx}{(3x-1)^2}=?$

14. $\int \frac{2x\,dx}{(x-3)^4}=?$

15. $\int \frac{3x\,dx}{(7-4x)^6}=?$

*16. Keresendő a $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ érintő-iránytangensű görbesereg azon görbéje, amely átmegy a (3, 4) ponton! (L. hátul!)

δ

1. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}=?$ – A nevezőt normálalakra hozzuk:

$$x^2-2x+5=(x^2-2x+1)+4=(x-1)^2+2^2=t^2+4,$$

ahol $t=x-1$ és $dt=dx$. Ezekkel:

$$I=\int \frac{dt}{t^2+4}=\operatorname{arc\,tg} t+C=\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C.$$

2. $\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}=?$ – A nevező normálalakja:

$$3x^2+4x-7=3\left[\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{7}{3}-\frac{4}{9}\right)\right]=$$

$$=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]=3\left(t^2-\frac{25}{9}\right),$$

ahol $t=x+\frac{2}{3},\quad dt=dx.$

$$\text{Ezekkel: } I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2-\frac{25}{9}}=-\frac{1}{5}\operatorname{arc\,th}\frac{3t}{5}=-\frac{1}{5}\operatorname{arc\,th}\frac{3x+2}{5}+C=\frac{1}{10}\ln C\frac{3x-3}{3x+7},$$

ha $x>1$ és $x<-\frac{7}{3}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2-6x+12}=?$

4. $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}=?$

5. $\int\frac{dx}{9x^2-6x-8}=?$

6. $\int\frac{8\,dt}{16t^2+8t+9}=?$

7. $\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=?$

8. $\int_{-1}^0\frac{dx}{4x^2-9}=?$

9. $\int_0^1\frac{dx}{9x^2-6x+1}=?$

*10. $\int\frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}=?$

*11. $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}=?$

*12. $\int\frac{x^2\,dx}{x^6-6x^3+5}=?$

13. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=?$

14. $\int\frac{dx}{2x^2-6x+7}=?$

ε 1. $\int\frac{3x-1}{x^2-2x+10}dx=?$ – A nevezőt normálalakra hozzuk, a számlálót pedig a nevező deriváltjának konstans-szorosa és egy konstans összegeként állítjuk elő: $x^2-2x+10=(x-1)^2+3^2=t^2+9$,

ahol $x-1=t$ és $x=t+1$, $dx=dt$; $3x-1=3t+2=\frac{3}{2}\cdot 2t+2$, – összhangban az elméleti részbeli levezetéssel! Így az integrál:

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+9}+2\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{3}{2}\ln C(t^2+9)+\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{3}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln C(x^2-2x+10)+\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{3}.$$

2. $\int\frac{6x-7}{2x^2-6x+7}dx=?$ – A számláló és nevező átalakítása: $2x^2-6x+7=$

$$=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{7}{2}\right)=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=2\left(t^2+\frac{5}{4}\right),$$

ahol $t=x-\frac{3}{2}$ és $dx=dt$; $6x-7=6r+2=\frac{3}{2}\cdot 4t+2$.

Tehát: $I=\frac{3}{2}\int\frac{4t\,dt}{2\left(t^2+\frac{5}{4}\right)}+\frac{2}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{5}{4}}=\frac{3}{2}\ln C(2x^2-6x+7)+$

$$+\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{5}}.$$

3. $\int\frac{4-7x}{x^2-6x+25}\,dx=?$ – Írjuk fel közvetlenül az eredményt a levezetett képlet alapján! – Esetünkben: $M=-7$, $N=4$, $p=-6$, $q=25$, továbbá $2N-pM=-34$, $4q-p^2=64$.

Így: $I=-\frac{7}{2}\ln C(x^2-6x+25)-\frac{17}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{4}$.

4. $\int\frac{3x-1}{x^2-2x-3}dx=?$ – Most $q-\frac{p^2}{4}=-3-1=-4=-a^2$ esetben vázoljuk a számítást: $I=\int\frac{3x-1}{(x-1)^2-4}\,dx=\int\frac{3t+2}{t^2-4}\,dt=\frac{3}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2-4}+2\int\frac{dt}{t^2-4}=\frac{3}{2}\ln C(x^2-2x-3)-$ $-\operatorname{arc\,th}\frac{x-1}{2}=\frac{3}{2}\ln C(x^2-2x-3)+\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x+1}=\frac{1}{2}\ln C^3\frac{(x^2-2x-3)^3\cdot(x-3)}{x+1}=\ln k(x-3)^2\cdot$ $\cdot(x+1)$, ha $x<-1$. – (A számítást $I=\int\frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+1}\right)dx$ módon részlettörtekre bontással is végezhetjük! Lásd később!)

5. $\int\frac{5x+6}{x^2-8x+16}\,dx=?$ – Most $q-\frac{p^2}{4}=16-16=0$. Tehát $I=\int\frac{5x+6}{(x-4)^2}dx=$ $=\int\frac{5t+26}{t^2}\,dt=5\int\frac{dt}{t}+26\int\frac{dt}{t^2}=5\ln C(x-4)-\frac{26}{x-4}$.

6. $\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx=?$

7. $\int\frac{6x-1}{1-9x^2}\,dx=?$

8. $\int\frac{2x-3}{3x^2-2}\,dx=?$

9. $\int\frac{2x+5}{x^2+2x+5}\,dx=?$

10. $\int\frac{1-x}{4x^2-4x-3}\,dx=?$

11. $\int\frac{8x-3}{4x^2-4x+9}\,dx=?$

12. $\int\frac{2x-3}{3x^2+4x-7}\,dx=?$

13. $\int\frac{x\,dx}{2-6x-x^2}=?$

14. $\int\frac{3x-2}{1-6x-9x^2}\,dx=?$

*15. $\int\frac{2x^3+3x+1}{x^2-2x-3}\,dx=?$

16. $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = ?$

17. $\int \frac{9x-31}{x^2-8x+15}\,dx = ?$

18. $\int \frac{4x+1}{2x^2-6x+7}\,dx = ?$

19. $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+10} = ?$

20. $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}\,dx = ?$

21. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2} = ?$

22. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\,dx = ?$

*23. $\int \frac{(6x^4-5x^3+4x^2)}{2x^2-x+1}\,dx = ?$

ζ 1. $\int \frac{3x-4}{(x^2-2x+5)^3}\,dx = ?$ – A nevezőbeli másodfokú kifejezést normálalakra hozzuk, a számlálót pedig az előbbi deriváltjának konstans-szorosa és egy konstans összegeként állítjuk elő:

$$I = \int \frac{3(x-1)-1}{[(x-1)^2+2^2]^3}\,dx = \int \frac{3t-1}{(t^2+4)^3}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)^3} - \int \frac{dt}{(t^2+4)^3}.$$

Az első integrált egyszerűen helyettesítéssel, a másodikat körülményesebben, a 2. § b. β_6) alatti rekurzív formula segítségével oldjuk meg:

$$I = -\frac{3}{4}\,\frac{1}{(t^2+4)^2} - \left[\frac{1}{16}\,\frac{t}{(t^2+4)^2} + \frac{3}{128}\,\frac{t}{t^2+4} + \frac{3}{256}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}\right] + C =$$

$$= -\frac{3}{4}\,\frac{1}{(x^2-2x+5)^2} - \frac{1}{16}\,\frac{x-1}{(x^2-2x+5)^2} - \frac{3}{128}\,\frac{x-1}{x^2-2x+5} -$$

$$-\frac{3}{256}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

2. $\int \frac{2x-4}{(x^2-3x+3)^2}\,dx = ?$

3. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^3} = ?$

4. $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx = ?$

5. $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+10)^3}\,dx = ?$

6. $\int \frac{2(x+1)}{(x^2+x+1)^3}\,dx = ?$

7. $\int \frac{8x-16}{(4x^2-12x+34)^2}\,dx = ?$

8. $\int \frac{7x+3}{(16x^2-24x+13)^2}\,dx = ?$

9. $\int \frac{5-9x}{(4x^2-12x+10)^3}\,dx = ?$

c) Tetszőleges racionális (valódi tört-) függvény integrálása részlettörtekre bontás útján

α) Bevezetés

A racionális függvények *legáltalánosabb alakja:*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}.$$

Ha $m \geqq n$, akkor a $P(x)/Q(x)$ kijelölt osztás elvégzésével az $R(x)$ racionális *áltörtfüggvény* előállítható egy *polinom* és egy racionális *valódi törtfüggvény* (számlálója m-edfokú és $m' < n$) összegeként.

Hangsúlyozzuk, hogy *a racionális függvény, e legáltalánosabb alakjában is, mindig* **integrálható,** *mégpedig racionális, logaritmus- és arc tg-függvényekkel, zárt alakban!* (Az integrálhatóság természetesen csak a nevező valamelyik zérus helyét nem tartalmazó szakaszra vonatkozik!)

A racionális függvények, integrálhatóságuk miatt *döntő szerepet játszanak az integrálszámításban. Az általános integrálási eljárások* lényege ugyanis az, hogy *a kérdéses integrálokat* **racionalizálják,** azaz racionális függvények integrálására vezetik vissza.

β) Algebrai ismeretek

A racionális függvények integrálására kialakult sablonos eljárás, ún. *algoritmus,* bizonyos algebrai tételekre támaszkodik. E *tételek* egy n.-fokú, valós együtthatójú algebrai egyenlet gyökének létezésére, gyökeinek számára, konjugált komplex gyökeire, a gyöktényezős alakra, a gyökök multiplicitására, a *Bézout*-féle átrendezésre vonatkoznak.*

γ) Racionális valódi törtfüggvény felbontása részlettörtekre

Az említett algebrai tételekből következik az alábbi, számítástechnikai szempontból *nagyjelentőségű tétel: Bármilyen racionális* **valódi törtfüggvény** *előállítható végesszámú, ún. első- és másodfajú* **részlettörtek összegeként,** így:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)_\alpha \ldots (x-e)^\varepsilon \cdot (x^2+kx+l)^\lambda \ldots (x^2+px+r)^\varrho} =$$

$$= \frac{A_\alpha}{(x-a)_\alpha} + \ldots + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_1}{x-a} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{E_\varepsilon}{(x-e)^\varepsilon} + \ldots + \frac{E_2}{(x-e)^2} + \frac{E_1}{x-e} +$$

$$+ \frac{K_\lambda x + L_\lambda}{(x^2+kx+l)^\lambda} + \ldots + \frac{K_2 x + L_2}{(x^2+kx+l)^2} + \frac{K_1 x + L_1}{x^2+kx+l} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{P_\varrho x + Q_\varrho}{(x^2+px+q)^\varrho} + \ldots + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{P_1 x + Q_1}{x^2+px+q}.$$

Itt az $\frac{A_\alpha}{(x-a)_\alpha}$ alakú elsőfajú és $\frac{K_\lambda x + L_\lambda}{(x^2+kx+l)^\lambda}$ alakú másodfajú részlettörtek nagybetűs *együtthatói* mind *ismeretlenek.*

A továbbiakban *feltételezzük, hogy* $Q(x)$ *gyökei ismeretesek,* azaz $Q(x)$ gyöktényezős s ennek alapján a $P(x)/Q(x)$ részlettörtes alakja felírható.

A példákat – tanulmányi szempontok miatt – a következő módon csoportosítottuk:

* Lásd pl. Bermant i. m., I. kötet; Fihtengolc i. m., II. kötet.

γ_1) **A nevezőnek csak különböző, valós gyökei vannak**; azaz a törtfüggvény alakja:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-e)};$$

γ_2) **A nevezőnek csak valós gyökei vannak, némelyek többszörösek**; a törtfüggvény tehát:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-e)^{\varepsilon}},$$

az α, β, ..., ε kitevők nem mindegyike egyenlő 1-gyel;

γ_3) **A nevezőnek vannak különböző, komplex gyökei is**; azaz a törtfüggvény:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}\ldots(x-e)^{\varepsilon}\cdot(x^2+kx+l)\ldots(x^2+px+q)}.$$

γ_4) **A nevezőnek vannak többszörös komplex gyökei is**; ez a fentebbi általános eset:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}\ldots(x-e)^{\varepsilon}\cdot(x^2+kx+l)^{\lambda}\ldots(x^2+px+q)^{\varrho}},$$

a λ, k, ..., ϱ kitevők nem mind egyenlők 1-gyel.

δ) A részlettörtek ismeretlen állandóinak meghatározása

Ez a $P(x)/Q(x)$ *eredeti és részlettörtes alakjának* minden x-re fennállni tartozó egyenlősége, ún. *azonossága alapján* lehetséges. A $Q(x)$ gyökeinek jellegétől függően, *különböző módszerek* állnak rendelkezésre.

δ_1) **A határozatlan együtthatók módszere** *a legfontosabb, mert aránylag egyszerű és mindenkor* (többszörös és komplex gyökök esetén is) *alkalmazható.* – *A következő* **lépések***ben járunk el:* *a*) Felírjuk a $P(x)/Q(x)$ adott [$Q(x)$-ben gyöktényezős] és *részlettörtes alakját.* *b*) A *törtek eltávolítására* mindkét oldalt (alakot) szorozzuk $Q(x)$-szel, mint a nevezők legkisebb közös többszörösével. *c*) A jobb oldalon a kijelölt *műveleteket elvégezzük* és a kifejezést x hatványai szerint *rendezzük.* Az így nyert jobb oldali polinom együtthatói a részlettörtek ismeretlen állandóinak lineáris kombinációi. A bal oldalon maga a $P(x)$ áll, szintén x hatványai szerint rendezett alakban. *d*) E két polinom azonossága alapján *x ugyanazon hatványainak együtthatóit egyeztetjük,* miáltal annyi lineáris egyenletet nyerünk, ahány ismeretlen együttható szerepelt a részlettörtes alakban. *e*) E *lineáris egyenletrendszert* az ismeretlen együtthatókra, alkalmas módon (helyettesítéssel, az egyenlő együtthatók módszerével, determinánsokkal stb.) *megoldjuk,* s számértéküket beírjuk a részlettörtes alakba. *f*) Az előbb *d*) alatt említett *azonosság két oldalát tetszőleges x-értékeknél* [célszerűen a $P(x)$ és $Q(x)$ egyes gyökeinél] *is egyeztethetjük!*

***δ_2) Differenciálási módszer, ha Q(x) csak egyszeres valós gyökökkel rendelkezik.** Ekkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-e)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\dots+\frac{E}{x-e},$$

ahol nyilván $A=\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}(x-a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{\frac{Q(x)-Q(a)}{x-a}}=\frac{P(a)}{Q'(a)}$ és hasonlóan

$$B=\frac{P(b)}{Q'(b)},\ \dots,\ E=\frac{P(e)}{Q'(e)}.$$

***δ_3) Differenciálási módszer, ha Q(x) csak egyetlen többszörös valós gyökkel rendelkezik.** Ekkor írható:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_1}{x-a}.$$

A törteket eltávolítva, a $P(x)$-nek $(x-a)$ hatványai szerint rendezett Taylor-polinomja adódik, ahol:

$$A_\alpha=P(a),\ A_{\alpha-1}=\frac{P'(a)}{1!},\ \dots,\ A_2=\frac{P^{(\alpha-2)}(a)}{(\alpha-2)!},\ A_1=\frac{P^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!}.$$

***δ_4) Differenciálási módszer, ha Q(x) egyszeres gyökei között konjugált komplex gyökpárok is előfordulnak.** Pl. a $\bar{b}$ és b gyökpárnak megfelelő részlettörtes kifejezés a δ_2) szerint:

$$\frac{P(b)}{Q'(b)}\frac{1}{x-b}+\frac{P(\bar{b})}{Q'(\bar{b})}\frac{1}{x-\bar{b}}=\frac{\left[\frac{P(b)}{Q'(b)}+\frac{P(\bar{b})}{Q'(\bar{b})}\right]x-\left[\bar{b}\frac{P(b)}{Q'(b)}+b\frac{P(\bar{b})}{Q'(\bar{b})}\right]}{x^2-(b+\bar{b})x+b\bar{b}}.$$

ε) Összefoglalás

A β), γ) és δ) alapján megállapítható, hogy *a racionális törtfüggvények integrálásánál az algebrai teendők* [a $Q(x)=0$ algebrai egyenlet megoldása, $P(x)/Q(x)$ részlettörtes alak ismeretlen együtthatóinak kiszámítása] *vannak túlsúlyban.* A segítségükkel teljesen meghatározott *első- és másodfajú részlettörtek integrálása, a* b. *cikkben* már *tanulmányozott módon,* nehézség nélkül elvégezhető!

Példák és feladatok

γ, δ, ε | γ_1), δ_2), ε)

1. $\int\frac{dx}{x^2+10x+16}=?$ – A nevező gyöktényezős alakja [lévén $x_1x_2=16$, $x_1+x_2=-10$, így $x_1=-8$, $x_2=-2$]: $x^2+10x+16=(x+8)\cdot(x+2)$. Az integrálandó *részlettörtes alakja* tehát, ismeretlen együtthatókkal, a γ) értelmében:

$$\frac{1}{(x+8)(x+2)}=\frac{A}{x+8}+\frac{B}{x+2}.$$

Most a δ_1) szerint, mindkét oldalt $(x+8)(x+2)$-vel szorozzuk, majd a kijelölt szorzásokat elvégezzük és rendezünk:

$$1 = A(x+2) + B(x+8) = Ax + 2A + Bx + 8B = (A+B)x + (2A+8B).$$

A két oldal megfelelő együtthatóit egyeztetjük:

$$A+B=0, \quad 2A+8B=1,$$

és az így nyert *lineáris egyenletrendszert* megoldjuk:

$$A=-B, \quad -2B+8B=6B=1, \quad \text{azaz}$$

$$B=\frac{1}{6} \quad \text{és} \quad A=-\frac{1}{6}.$$

A részlettörtes alak tehát, most már ismert együtthatókkal:

$$\frac{1}{(x+8)(x+2)} = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{x+8} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{x+2}.$$

A kérdezett integrál végül, az ε) szerint:

$$I = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+8} + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{6}\left[-\ln(x+8) + \ln(x+2) + \ln C\right] = \frac{1}{6}\ln C\,\frac{x+2}{x+8}.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x-3}{x^3-x}\,dx = ?$ – Az integrálandó *azonos átalakítása,* a γ) szerint:

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{x-3}{x(x^2-1)} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)}.$$

A 3. és az utolsó alak *megfelelő együtthatóit* – a δ_1) *d*) *értelmében* – *egyeztetve* nyerjük

$$A+B+C=0, \quad B-C=1, \quad A=3;$$

$$\left.\begin{aligned} B+C&=-3\\ B-C&=1\end{aligned}\right\}, \quad B=-1, \quad C=-2.$$

A fentebbi *azonosság két oldalát* (a 3. és utolsóelőtti alakját) a δ_1) *f*) értelmében – *tetszőleges x-értékeknél is egyeztethetjük!* Esetünkben a nevező gyökeinél, azaz $x=0$, $x=1$ és $x=-1$ értékeknél célszerű végezni a két oldal egyeztetését:

$$x=0\text{-nál:}\ -3=-A, \quad x=1\text{-nél:}\ -2=2B \quad \text{és}$$

$$x=-1\text{-nél:}\ -4=2C.$$

Ezen egyszerű egyenleteket megoldva, nyerjük: $A=3$, $B=-1$, $C=-2$, *egyezésben a fentebbi eredményekkel.*

A kérdezett integrál tehát:

$$I=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{x+1}=3\ln x-\ln(x-1)-2\ln(x+1)+\ln C=\ln C\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}.$$

3. $\int\frac{x^6-5x+2}{x^2-4}dx=?$ – Az integrálandó *áltört* függvény lévén, *osztással* egy polinom és egy valódi törtfüggvény összegeként állítjuk elő:

$$(x^6-5x+2):(x^2-4)=x^4+4x^2+16+\frac{-5x+66}{(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^6-4x^4} \\
\quad +4x^4-5x \\
\quad \underline{\pm 4x^4 \mp 16x^2} \\
\qquad +16x^2-5x+2 \\
\qquad \underline{\pm 16x^2 \quad \mp 64} \\
\qquad\qquad -5x+66
\end{array}$$

Folytassuk!

4. $\int\frac{dx}{x^2-4x-5}=?$

5. $\int\frac{dx}{x^2+2x-8}=?$

6. $\int\frac{3x-1}{x^2+2x-3}dx=?$

7. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}=?$

8. $\int\frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}=?$

9. $\int\frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx=?$

10. $\int\frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}dx=?$

11. $\int\frac{x^3\,dx}{x+1}=?$

12. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx=?$

13. $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}=?$

14. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}=?$

15. $\int\frac{x^{10}\,dx}{x^2+x-2}=?$

16. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx=?$

17. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx=?$

18. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=?$

19. $\int\frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}=?$

20. $\int\frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}=?$

21. $\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx=?$

22. $\int\frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx=?$

23. $\int\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx=?$

γ_2), δ_1), ε) **1.** $\int \frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}dx=?$ – Az integrálandó *résztörtes alakja* az elmélet szerint:

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_2}{(x-2)^2}+\frac{B_1}{x-2}.$$

Az eredeti nevezővel szorzást végzünk mindkét oldalon, majd rendezünk:

$$x-5=A(x-2)^2+B_2(x+1)+B_1(x+1)(x-2)=$$

$$(A+B_1)x^2+(-4A+B_2-B_1)x+(4A+B_2-2B_1).$$

A megfelelő együtthatók egyeztetése útján nyert $A+B_1=0$, $-4A+B_2-B_1=1$, $4A+B_2-2B_1=-5$ lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

$$A=-B_1,\quad \left.\begin{matrix} B_2+3B_1=1 \\ B_2-6B_1=-5\end{matrix}\right\};\quad B_1=\frac{2}{3},\quad B_2=-1$$

$$A=-\frac{2}{3}.$$

A fentebbi azonosság két oldalát (az 1. és 2. alakját) – a δ_1) *f*) szerint – *tetszőleges x-értékeknél is,* esetünkben pl. rendre $x=-1$, $x=2$ és $x=0$ értékeknél is, *egyeztethetjük:*

$$-6=9A,\qquad -3=3B_2,\qquad -5=4A+B_2-2B_1.$$

Ezen egyenletek megoldása: $A=-\frac{2}{3}$, $B_2=-1$, $B_1=\frac{2}{3}$, – egyezésben a fentiekkel!

A kérdezett integrál ezek után így alakul:

$$I=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}=-\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{x-2}+$$

$$+\frac{2}{3}\ln(x-2)+\frac{2}{3}\ln C=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln C\frac{x-2}{x+1}.$$

2. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=?$

Az integrálandó átalakítása:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2\cdot(x+3)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{C_3}{(x+3)^3}+$$

$$+\frac{C_2}{(x+3)^2}+\frac{C_1}{x+3}=\frac{A(x+2)^2(x+3)^3+B_2(x+1)(x+3)^3}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}+$$

$$+\frac{B_1(x+1)(x+2)(x+3)^3+C_3(x+1)(x+2)^2+C_2(x+1)(x+2)^2(x+3)+C_1(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

Folytassuk a számítást a kijelölt szorzások elvégzésével, összevonással, az (1. és 3. alakban a) számlálók megfelelő együtthatóinak egyeztetésével, a 6 ismeretlen együtthatóra így nyert 6 lineáris egyenlet megoldásával s végül a teljesen meghatározott 6 elsőfajú részlettört integrálásával!

3. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx = ?$

4. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = ?$

5. $\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = ?$

6. $\int \frac{5\,dx}{(4x-5)^2} = ?$

7. $\int \frac{5x-1}{(2x+1)^3}\,dx = ?$

8. $\int \frac{x^2-5x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx = ?$

9. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx = ?$

10. $\int \frac{x_3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx = ?$

11. $\int \frac{dx}{x^4-x^2} = ?$

12. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2} = ?$

13. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx = ?$

14. $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)} = ?$

15. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx = ?$

16. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx = ?$

*17. $\int \frac{x^7\,dx}{(1-x^2)^5} = ?$

γ_3), δ_1), ε) **1.** $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4} = ?$ – *Az integrálandó (azonos) átalakítása* esetünkben, elmélet szerint:

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{x^2}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} =$$

$$= \frac{A(1+x)(1+x^2) + B(1-x)(1+x^2) + (Cx+D)(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{(A-B-C)x^3 + (A+B-D)x^2 + (A-B+C)x + (A+B+D)}{(1-x^4)}.$$

A *határozatlan együtthatók* már jól ismert *módszerével:*

$$\begin{array}{c|c} A-B-C=0 & A+B-D=1 \\ A-B+C=0 & A+B+D=0 \\ \hline A-B \quad =0 & A+B \quad =\frac{1}{2} \end{array}$$

$$A = B = \frac{1}{4}, \quad D = -\frac{1}{2}, \quad C = 0.$$

A kérdezett integrál tehát:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{4}\ln C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln C\,\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

2. $\displaystyle\int\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+x+4)}\,dx=?$ – Az integrálandó *részlettörtes alakja:*

$\displaystyle\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+4}$. Az ismeretlen együtthatókra, a szokásos módon eljárva, az

$$A=\frac{2}{3},\quad B=\frac{7}{3},\quad C=\frac{5}{3}$$

értékek adódnak. Az integrálás:

$$I=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{7x+5}{x^2+x+4}\,dx=\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{3}I_1;$$

$$\frac{1}{3}I_1=\frac{1}{6}\int\frac{7(2x+1)+(10-7)}{x^2+x+4}\,dx=\frac{7}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{7}{6}\ln(x^2+x+4)\quad\frac{\sqrt{15}}{15}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{15}}+C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=?$

4. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2x+5)}\,dx=?$

5. $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx=?$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=?$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}=?$

8. $\displaystyle\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx=?$

9. $\displaystyle\int\frac{2x^4+2x^3+3x^2+7x+2}{x^5+x^4+2x^3}\,dx=?$

(L. hátul!)

10. $\displaystyle\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}=?$

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^4}=?$ – A nevezőt egy fogással kvadratikus gyöktényezőkre bontjuk:

$$1+x^4=(1+2x^2+x^4)-2x^2=(1+x^2)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=\left(1+x\sqrt{2}+x^2\right)\left(1-x\sqrt{2}+x^2\right).$$

* Ez az integrál *Leibniz*nek még nehézséget okozott!

Az integrálandó részlettörtes alakja: $\dfrac{1}{1+x^4}=\dfrac{Ax+B}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\dfrac{Cx+D}{1-x\sqrt{2}+x^2}$.

A határozatlan együtthatók módszerével nyerjük:

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad D=\frac{1}{2}.$$

A keresett integrál tehát:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln C\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}}+\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)\right].$$

***12.** $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^3}=?$ – Felhasználandó az $1+x^3=(x+1)(x^2-x+1)$ azonosság!

***13.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+1}=?$ – Felhasználandó:

$$x^6+1=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+1).^*$$

***14.** $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^3-1}=?$ ***15.** $\displaystyle\int\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx=?$

γ_4), δ_1), ε) ***1.** $\displaystyle\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=?$ – Az integrálandó *részlettörtes alakja*, az elmélet szerint:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Mindkét oldalt $Q(x)$-szel *szorozva*, nyerjük:

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+C)(x-2).$$

A kijelölt szorzásokat elvégezve és x hatványai szerint rendezve, kapjuk:

$$2x^2+2x+13=(A+B)x^4+(-2B+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+$$
$$+(-2B+C-2D+E)x+(A-2C-2E).$$

A két oldal *megfelelő együtthatóit egyeztetve*, a következő lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\begin{array}{c|lr} x^4 & A+B & =0\\ x^3 & -2B+C & =0\\ x^2 & 2A+B-2C+D & =2\\ x & -2B+C-2D-E & =2\\ 1 & A-2C-2E & =13 \end{array}$$

* L. a B. IV. kötetben a komplex gyökvonást!

Ezt pl. determinánsokkal (lásd az A. VIII.-ban) megoldjuk: az eredmény:

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-2, \quad D=-3, \quad E=-4.$$

A *részlettörtes alak,* most már *határozott együtthatókkal:*

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Az integrálás, a b. β), ε), ζ) felhasználásával:

$$I=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arc\,tg}x-\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}+4\left(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x\right)\right]+\frac{1}{2}\ln C=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln C\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arc\,tg}x.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx=?$

3. $\displaystyle\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=?$

4. $\displaystyle\int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx=?$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+9)^3}=?$

6. $\displaystyle\int\frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx=?$

7. $\displaystyle\int\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}dx=?$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}=?$

9. $\displaystyle\int\frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}=?$

10. $\displaystyle\int\frac{(x^7+x^5+x^3+x)\,dx}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2}=?$

11. $\displaystyle\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx=?$

*12. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}=?$ – Esetünkben egy-két ügyes fogással eszközölhető az Integrandus részlettörtekre bontása:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Integráljunk!

γ_5) Vegyes gyakorló feladatok a γ), δ_1), ε)-hoz.

1. $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx = ?$

2. $\int \frac{2x^2+41x-21}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx = ?$

3. $\int \frac{3x^2-7}{(x+1)(x^2-9)}\,dx = ?$

4. $\int \frac{13(x^2+1)}{(x-2)(x^2+2x+5)}\,dx = ?$

*5. $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2} = ?$

6. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx = ?$

7. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx = ?$

8. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = ?$

9. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = ?$

10. $\int \frac{dx}{x^4-1} = ?$

11. $\int \frac{4dx}{x^3+4x} = ?$

12. $\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\,dx = ?$

*13. $\int \frac{12dx}{x^4+x^2-x-1} = ?$

14. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = ?$

*15. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$

16. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^3} = ?$

17. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = ?$

18. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx = ?$

19. $\int \frac{4x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = ?$

20. $\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = ?$

21. $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx = ?$

22. $\int \frac{dx}{x^3-8} = ?$

*23. $\int \frac{dx}{x^3+8} = ?$

*24. $\int \frac{dx}{x^4+4} = ?$

25. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = ?$

26. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx = ?$

27. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^2} = ?$

*γ), δ_2), ε) 1. $\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx = ?$ – Az integrálandó *részlet-*

törtes alakjának együtthatóit most a δ_2)-ben ismertetett *differenciálási módszerrel* határozzuk meg!

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2-x+4}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Esetünkben $Q(x)=(x-1)(x+1)\,(x+2)=(x^2-1)(x+2)$,

$$Q'(x)=2x(x+2)+(x^2-1)=3x^2+4x-1;$$

tehát:

$$A=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}=\frac{6}{-2}=-3,\quad B=\frac{P(1)}{Q'(1)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad C=\frac{P(-2)}{Q'(-2)}=\frac{10}{3}.$$

Az integrálás, az együtthatók ismeretében:

$$I=-3\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{10}{3}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=-3\ln(x+1)+\frac{2}{3}\ln(x-1)+\frac{10}{3}\ln(x+2)+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}=?$

3. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}=?$

4. $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx=?$

5. $\displaystyle\int\frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}=?$

6. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}=?$

7. $\displaystyle\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx=?$

*γ), δ_3), ε) 1. $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{(x-1)^4}\,dx=?$ – Az integrálandó *részlettörtes alakjának együtthatóit* most a δ_3)-ban bemutatott *differenciálási módszerrel* állapítsuk meg!

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+1}{(x-1)^4}=\frac{A_4}{(x-1)^4}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}.$$

Esetünkben: $P(x)=x^3+1$, $P'(x)=3x^2$, $P''(x)=6x$, $P'''(x)=6$, $P^{IV}(x)=0$. Ezek felhasználásával írhatjuk:

$$A_4=P(1)=2,\quad A_3=\frac{P'(1)}{1!}=3,\quad A_2=\frac{P''(1)}{2!}=3,$$

$A_1=\dfrac{P'''(1)}{3!}=1.$ Az együtthatók birtokában az integrálás:

$$I=2\int\frac{dx}{(x-1)^4}+3\int\frac{dx}{(x-1)^3}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+\ln C(x-1).$$

2. $\int \frac{4x-3}{(x-2)^3}\,dx = ?$

4. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx = ?$

3. $\int \frac{5x-1}{(2x+1)^3}\,dx = ?$

5. $\int \frac{ax^2\,dx}{(x+a)^3} = ?$

*γ), δ_4), ε) 1. $\int \frac{dx}{1+x^3} = ?$ – Az integrálandó *részlettörtes alakjának együtthatóit* most a δ_4)-ben ismertetett *komplex differenciálási módszerrel* határozzuk meg!

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{C}{x-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B^*x+C^*}{x^2-x+1}.$$

Mivel $Q'(x) = 3x^2$, így a megadott képlet szerint:

$$B^* = \frac{P\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{P\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{3\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{-3+i3\sqrt{3}} + \frac{2}{-3-i3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2(-3-i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3})}{9+27} = -\frac{1}{3} = B^*$$

Továbbá:

$$C^* = -\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{P\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{P\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{2}{-3+i3\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{2}{-3-i3\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{2}{2}\cdot\frac{(1-i\sqrt{3})(-3-i3\sqrt{3})+(1+i\sqrt{3})(-3+i3\sqrt{3})}{9+27} =$$

$$= -\frac{(-3-9-3-9)+i(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3\sqrt{3})}{36} = +\frac{2}{3} = C^*$$

Eszerint, lévén

$$A = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}.$$

Láthatóan elég körülményes módszer! A kérdezett integrál tehát:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\ln C = \frac{1}{6}\ln C\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

2. $\displaystyle\int \frac{4dx}{x^3+4x} = ?$ (L. hátul!)

3. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx = ?$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx = ?$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4} = ?$ (L. hátul!)

**d) Osztrogradszkij—Hermite módszere

E módszerrel tetszőleges racionális (valódi tört-) függvény integrálása *a határozatlan integrál racionális része* tekintetében teljesen *algebrai úton történik*, s csupán transzcendens része meghatározásánál fordul elő tényleges integrálás! *A számítás az*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

formulából indul ki. Ebben $Q_2(x)$ a $Q(x)$ összes lineáris és kvadratikus gyöktényezőit csupán első hatványon tartalmazó polinom és $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$, a $P_1(x)$ és $P_2(x)$ pedig nevezőjüknél eggyel alacsonyabb fokú, ismeretlen együtthatójú polinomok. Ez utóbbiakat a (c. δ_1)-ben ismertetett) határozatlan együtthatók módszerével határozzuk meg, kiindulási formulából *differenciálással* nyerhető

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' - \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

azonosság alapján. – Ha $Q(x)$ gyöktényezős alakja nem ismeretes, akkor $Q_1(x) = Lko[Q(x), Q'(x)]$ számítható.

A $P_2(x)/Q_2(x)$ integrálandó $\dfrac{A}{x-a}$ és $\dfrac{Kx+L}{x^2+kx+l}$ alakú részlettörtekre bontható, melyek határozatlan integráljában ln és arc tg függvények szerepelnek.

E módszer a legnehezebb esetekben is *jelentős mértékben megkönnyíti a racionális törtfüggvények integrálását!*[1]

[1] Lásd bővebben: Bermant i. m. I. kötet; Fihtengolc i. m. II. kötet.

Példák, feladatok

1. $$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2\cdot(x^2+1)^2}\,dx.$$

Esetünkben

$$Q(x)=(x+1)^2\cdot(x^2+1)^2, \qquad Q_2(x)=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1 \quad \text{és}$$

$$Q_1(x)=\frac{Q(x)}{Q_2(x)}=(x+1)(x^2+1)=Q_2(x),$$

ennélfogva írható:

$$I=\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}+\int\frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}\,dx.$$

A $P_1(x)$ és $P_2(x)$ *ismeretlen együtthatóinak meghatározására differenciáljuk* ezen azonosságot

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2}=\left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]'+\frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}$$

értelemben; ezt végrehajtva és $Q(x)$-szel szorozva mindkét oldalt, nyerjük:

$$-4x^4+4x^3+16x^2+12x+8=(2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-$$
$$-(ax^2+bx+c)\cdot(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1)$$

A kijelölt szorzásokat elvégezve, rendezve, majd a két oldal megfelelő együtthatóit egyeztetve, a következő egyenletrendszer adódik az ismeretlen együtthatókra:

$$\begin{array}{c|l}
x^5 & d = 0 \\
x^4 & -a + e = 4 \\
x^3 & -2b + e + f = 4 \\
x^2 & a - b - 3c + e + f = 16 \\
x & 2a - 2c + e + f = 12 \\
1 & b - c + f = 8
\end{array}$$

Ennek megoldása (pl. determinánsokkal):

$$a=-1, \quad b=1, \quad c=-4, \quad d=0, \quad e=3, \quad f=3.$$

Ezek figyelembevételével tehát az integrál:

$$I=\frac{-x^2+x-4}{x^3+x^2+x+1}+3\int\frac{(x+1)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\,\text{arc tg}\,x+C.$$

2. $$\int\frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx.$$

Most

$$Q_2(x)=(x-1)(x^2-2x+2) \quad \text{és} \quad Q_1(x)=(x^2-2x+2)^2,$$

tehát

$$I=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2-2x+2)^2}+\int\frac{e\,dx}{x-1}+\int\frac{fx+g}{x^2-2x+2}\,dx.$$

[Ugyanis az

$$\int\frac{e^*x^2+f^*x+g^*}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx$$

integrált, az előző cikk értelmében, a fentebbi két utolsó integrállal számítjuk!] – Ezt differenciálva, majd $Q(x)$-szel szorozva nyerjük:

$$2x^4-4x^3+24x^2-40x+20=(3ax^2+2bx+c)(x^2-2x+2)(x-1)-$$
$$-(ax^3+bx^2+cx+d)(2x-2)2\cdot(x-1)+e(x^2-2x+2)^3+(fx+g)(x-1)(x^2-2x+2)^2.$$

Beszorzás, rendezés, egyeztetés után:

$$\begin{array}{c|l}
x^6 & e+f=0\\
x^5 & -a-6e-5f+g=0\\
x^4 & -a-2b+18e+12f-5g=2\\
x^3 & 8a+2b-3c-32e-16f+12g=-4\\
x^2 & -6a+4b+5c-4d+36e+12f-16g=24\\
x & -4b+8d-24e-4f+12g=-40\\
1 & -2c-4d+8e-4g=20,
\end{array}$$

ahonnan pl. determinánsokkal nyerjük:

$$a=2,\quad b=-6,\quad c=8,\quad d=-9,\quad e=2,\quad f=-2,\quad g=4.$$

Ezekkel:

$$I=\frac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x^2-2x+2)^2}+\ln C\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}+2\,\mathrm{arc\,tg}\,(x-1).$$

3. $\int\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}\,dx=?$ (Lásd a c. γ_4) 17. példát!)

Itt $Q(x)=x^5+2x^3+x,\quad Q'(x)=5x^4+6x^2+1.$

Számítsuk a

$Q_1(x)=Lko\,[Q(x),\,Q'(x)]$-et sorozatos osztással:

$$5\cdot(x^5+2x^3+x):(5x^4+6x^2+1)=x$$
$$\underline{\qquad}$$
$$4x^3+4x$$

$$(5x^4+6x^2+1):(x^3+x)=5x$$
$$\underline{\qquad}$$
$$x^2+1$$

$(x^3+x):(x^2+1)=x,$ tehát $Q_1(x)=x^2+1$ és
$\underline{\qquad}$
0

$$Q_2(x)=\frac{Q(x)}{Q_1(x)}=\frac{x^5+2x^3+x}{x^2+1}=x^3+x=x(x^2+1).$$

[Ez $Q(x)=x^5+2x^3+x=x(x^4+2x^2+1)=x(x^2+1)^2$ lévén várható volt!]

$$I'=\left[\frac{ax+b}{x^2+1}\right]'+\frac{cx^2+dx+e}{x^3+x}.$$ Folytassuk!

4. $\displaystyle\int\frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx=?$

5. $\displaystyle\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx=?$

6. $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx=?$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}=?$

8. $\displaystyle\int\frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx=?$

(L. hátul!)

9. $\displaystyle\int\frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx=?$

10. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^4+1)^2}=?$

**e) Különleges eljárások

Az alábbi típusok mind megoldhatók a *c*) és *d*)-ben tárgyalt általános módszerekkel, de *célszerűbb* rájuk *a most bemutatandó különleges eljárásokat alkalmazni.*

α) $\mathbf{I}_{m,n}=\displaystyle\int\frac{(2ax+b)^m}{(ax^2+bx+c)}\,dx$ Integrálására előnyös a következő *rekurzív formula:*

$$I_{m,n}=-\frac{(2ax+b)^{m-1}}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2a(m-1)}{n-1}\cdot I_{m-2,n-1}$$

β) $\displaystyle\int x^m(ax^n+b)^{-p}\,dx$ Itt *m, n* és *p* pozitív egész. Célszerű az $u=x^\sigma$ *helyettesítés,* ahol $\sigma=Lko\,(m+1,\ n)$.
(Vö. 4c-vel!)

γ) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^k(x-b)^l}$ A $t=\dfrac{x-a}{x-b}$ *helyettesítés* előnyös.

Ekkor

$$x=\frac{bt-a}{t-1},\qquad dx=\frac{a-b}{(t-1)^2}\cdot dt.$$

Példák és feladatok

α 1. $\displaystyle\int\frac{x^4\,dx}{(x^2+3)^3}=?$ – A megadott *rekurzív formula* alkalmazásával (itt $m=4,\ n=3$):

$$I=\frac{1}{16}I_{m,n}=\frac{1}{16}\int\frac{(2x)^4\,dx}{(x^2+3)^3}=\frac{1}{16}\left[-\frac{8x^3}{2(x^2+3)^2}+\frac{2\cdot 3}{2}\int\frac{4x^2\,dx}{(x^2+3)^2}\right].$$

Folytatva a rekurziót a

$$\frac{3}{16}\int\frac{(2x)^2\cdot dx}{(x^2+3)^2}=\frac{3}{16}\cdot I_{m-2,n-1}$$

integrállal, nyerjük:

$$\frac{3}{16}\cdot I_{m-2,n-1}=\frac{3}{16}\left[-\frac{2x}{x^2+3}+2\int\frac{dx}{x^2+3}\right].$$

Végeredményben:

$$I=-\frac{x^3}{4(x^2+3)^2}-\frac{3x}{8(x^2+3)}+\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^6\,dx}{(x^2-5)^4}=\frac{1}{64}\int\frac{(2x)^6\,dx}{(x^2-5)^4};$ 3. $\displaystyle\int\frac{x^6\,dx}{(x^2+4)^4};$

4. $\displaystyle\int\frac{x^4\,dx}{(x^2-3)^3};$

β 1. $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{(x^8+4)^2}=?$ – Esetünkben $m=3$, $n=8$ és $v=2$; $\sigma=Lko\,[m+1,n]=$ $=Lko\,[4,8]=4$ lévén, az $u=x^4$, $x=\sqrt[4]{u}=u^{\frac{1}{4}}$, $dx=\dfrac{du}{4\sqrt[4]{u^3}}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{u^{\frac{3}{4}}\cdot u^{-\frac{3}{4}}}{(u^2+4)^2}\,du=\frac{1}{4}\int\frac{du}{(u^2+4)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\,\frac{u}{u^2+4}+\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2}+C\right]=$$

$$=\frac{1}{32}\,\frac{x^4}{x^8+4}+\frac{1}{64}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^4}{2}+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^8-1}{x(x^8+1)}\,dx=?$ – Itt átalakítjuk az integrált: $\displaystyle I=\int\frac{x^8+1-2}{x(x^8+1)}\,dx=\int\frac{dx}{x}-$ $\displaystyle-2\int\frac{dx}{x(x^8+1)}=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{(x^8+1)-x^8}{x(x^8+1)}\,dx=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\int\frac{8x^7\,dx}{x^8+1}.$

3. $\displaystyle\int\frac{x^5\,dx}{(x^{12}+1)^2};$ 4. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^6+1)^2};$ 5. $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x(x^3-8)}\,dx;$

γ 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2(x-2)^3}=\int\frac{1}{(x-2)^5}\cdot\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}.$

Helyettesítés: $\frac{x+1}{x-2}=t,\quad x=\frac{2t+1}{t-1};\quad dx=\frac{-3dt}{(t-1)^2};\quad x-2=\frac{2t+1}{t-1}-2=$

$$=\frac{2t+1-2t+2}{t-1}=\frac{3}{t-1}.$$

Ezekkel: $I=\frac{-3}{3^5}\int(t-1)^5\frac{dt}{t^2(t-1)^2}=-\frac{1}{3^4}\int\frac{(t-1)^3}{t^2}dt=$

$$=-\frac{1}{81}\int\left[t-3+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}\right]-\frac{1}{162}\int\left[t-6t+6\ln Ct+\frac{2}{t}\right]=$$

$$=-\frac{1}{162}\left[\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2-6\frac{x+1}{x-2}+6\ln C\frac{x+1}{x-2}+2\frac{x-2}{x+1}\right]$$

2. $\int\frac{dx}{(x^2-x)^3}=\int\frac{dx}{x^3(x-1)^3};$ 3. $\int\frac{dx}{(x^2-1)^4};$

4. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2-1)^3}.$

Műszaki alkalmazások

1. *Két egyenlősugarú fém-gömbhéj kapacitása.*[1]

Legyen a két gömb középpontját összekötő egyenesen felvett P pont távolsága a C_1 középponttól x, a C_2-től $d-x$. E pontban a *térerősség*, vagyis a + töltésegységre gyakorolt erő:

$a+Q$ töltésű gömb hatására:

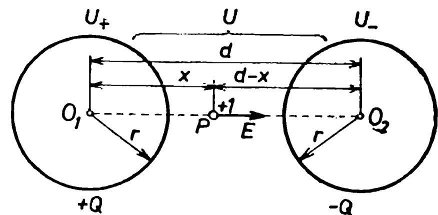
$$E_+(x)=\frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{4\pi Q}{4\pi x^2};$$

$a-Q$ töltésű gömb hatására:

$$E_-(x)=-\frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{4\pi(-Q)}{4\pi(d-x)^2};$$

az *eredő térerősség* tehát:

$$E(x)=\frac{c}{\varepsilon}Q\cdot\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(d-x)^2}\right].$$



27. ábra

A c dimenziós állandó.

A két fémgömb közti feszültség, mint az $(U_+-U_-)>0$ potenciálkülönbség

Az $E(r)=-\frac{dUr}{dr}$ miatt $\int^{d-r}E(r)\,dr=U_+-U_-=U-0.$

[1] L. Verebélÿ: Villamos művek, I. kötet.

$$U = +(U_+ - U_-) = \int_r^{d-r} E(x) \cdot dx = \frac{c}{\varepsilon} Q \int_r^{d-r} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] dx =$$

$$= \frac{c}{\varepsilon} Q \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right]_r^{d-r} = \frac{c}{\varepsilon} Q \left[\frac{2x-d}{(d-x)x}\right]_r^{d-r} = \frac{\varepsilon}{c} Q \left[\frac{d-2r}{r(d-r)} - \frac{2r-d}{(d-r)r}\right] =$$

$$= \frac{c}{\varepsilon} Q \cdot 2 \frac{d-2r}{r(d-r)} = U.$$

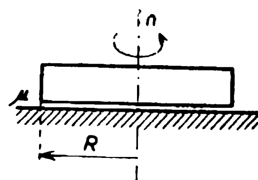
A két gömb kapacitása, mint az őket egységnyi feszültségre emelő töltés mennyisége:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{c}{\varepsilon} Q \cdot 2 \frac{d-2r}{r(d-r)}} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{r(d-r)}{2(d-2r)}.$$

Ha pl. $d = 3r$, akkor $C = \frac{\varepsilon}{c} r$.

2. *Forgó korong lefékezése lapsúrlódással.*[2]

Az M tömegű, R sugarú, függélyes tengely körül n percfordulattal forgó korongot helyezzük vízszintes, érdes síkra; a kettő közti súrlódás tényezője legyen μ. *Hányat* (x) *fordul a súrlódó korong teljes lefékeződéséig?*



28. ábra

Feltéve, hogy a korong egyenletes $p = \frac{G}{F} = \frac{Mg}{R^2 \cdot \pi}$ nyomással terheli a vízszintes lapot, így valamely $r < R$ sugarú, dr szélességű gyűrűszerű érintkezési felületelemen $dP = 2\pi r\, dr \cdot p$ nyomóerő és $dS = \mu \cdot dP$ súrlódóerő ébred. *A súrlódóerő munkája* a teljes érintkezési felületen x fordulat alatt:

$$L = \int_0^R \mu \cdot dP \cdot 2r\pi \cdot x = \int_0^R \mu \cdot 2\pi r\, dr \cdot p \cdot 2\pi r \cdot x = 4\pi^2 \mu p x \cdot \int_0^R r^2\, dr =$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} \mu p x R^3 = \frac{4\pi^2}{3} \mu \frac{Mg}{R^2\pi} \cdot R^3 = \frac{4}{3} \pi \mu M g R x.$$

E *súrlódási munka x fordulat alatt teljesen felemészti a korong kezdeti*

$$E_0 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \frac{n^2 \pi^2}{30^2}$$

lendületét, tehát írható:

$$\frac{4\pi}{3} \mu M g R x = \frac{1}{4} M R^2 \frac{n^2 \pi^2}{30^2},$$

ahonnan *a keresett fordulatszám:*

[1] L. Muttnyánszky: Kinetika.

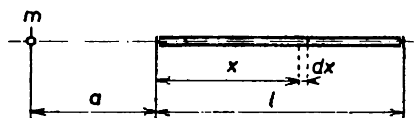
$$x = \frac{3}{16 \cdot 30^2} \cdot \frac{R\pi n^2}{\mu g} = \frac{n^2 \pi R}{4800 \mu g}.$$

3. *Vékony rúd vonzóereje egy kívüle, de tengelyén levő tömegpontra.*[1]

A vékony rúd l hosszúságú, q keresztmetszetű, ϱ sűrűségű; a külső pont tömege m.

Az 1. § c. – 2. példa szerint a rúd ábrázolt elemének az m-re gyakorolt *vonzóereje*

$$dP = \varkappa \cdot \frac{\varrho q \, dx \cdot m}{(a+x)^2},$$



29. ábra

az egész rúd vonzóereje pedig:

$$P = \varkappa q m \varrho \int_0^l \frac{dx}{(a+x)^2} = \varkappa q m \varrho \left[-\frac{1}{a+x} \right]_0^l = \varkappa q m \varrho \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right).$$

4. *Disszociáló gáz maximális munkája izotermikus expanziónál.*[2]

Legyen p a disszociált gáz nyomása, v a térfogata, P a disszociálatlan gáz nyomása, K a disszociációs állandó, $\alpha + \alpha(v)$ a disszociáció foka. Szorítkozzunk binár disszociációra!

Ha eredetileg n molekula volt, akkor a keletkezett új részek száma $2\alpha n$; a nem disszociált molekulák száma pedig $n - \alpha n = n(1-\alpha)$. Az új és régi molekulák aránya:

$$\frac{n(1-\alpha) + 2\alpha n}{u} = 1 - \alpha + 2\alpha = 1 + \alpha,$$

a régi és új nyomás aránya pedig:

$$\frac{P}{p} = 1 + \alpha, \qquad \text{azaz} \qquad P = p(1+\alpha).$$

A *maximális munka*, $pv = C$ állapotegyenletű *izotermikus expanziónál*:

$$L = \int_v^{v_1} P \cdot dv = \int_v^{v_1} p \, dv + \int_v^{v_1} \alpha p \, dv = C \int_v^{v_1} \frac{dv}{v} + C \int_\alpha^{\alpha_1} \alpha \cdot \frac{1}{v(\alpha)} \cdot v'(\alpha) \, d\alpha.$$

Ez utóbbi integrálban:

$$v(\alpha) = \frac{1}{K} \frac{\alpha^2}{1-\alpha}, \qquad dv = v'(\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{K} \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2} \cdot d\alpha$$

és így

$$\alpha \cdot \frac{1}{v(\alpha)} \cdot v'(\alpha) = \alpha \cdot \frac{K(1-\alpha)}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{K} \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2} = \frac{2-\alpha}{1-\alpha} = 1 + \frac{1}{1-\alpha}.$$

[1] L. Lindow: Integralrechnung.
[2] Lindow: Integralrechnung. — Fenyő: Matematika I.

Ennek felhasználásával a maximális munka kifejezése így alakul:

$$L=C\left[\ln\frac{v_1}{v}+(\alpha_1-\alpha)+\ln\frac{1-\alpha}{1-\alpha_1}\right]=C\left[\ln\frac{\alpha_1^2(1-\alpha)}{\alpha^2(1-\alpha_1)}+(\alpha_1-\alpha)+\ln\frac{1-\alpha}{1-\alpha_1}\right].$$

5. *Szabadesés légellenállással.*[1]

A *sebesség négyzetével arányos légellenállással* számolva, a mozgásegyenlet:

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{v^2}{\lambda^2},$$

ahol $\lambda^2=\frac{2G}{\psi\cdot\lambda\cdot F}$ és ebben G a zuhanó test súlya, F a maximális vízszintes keresztmetszete, γ a levegő fajsúlya, ψ tapasztalati tényező.

Szétválasztva:

$$\int_0^v\frac{dv}{g-\frac{v^2}{\lambda^2}}=\int_0^t dt$$

és integrálva

$$\frac{\lambda}{\sqrt{g}}\,\mathrm{ar\,th}\frac{v}{\lambda\sqrt{g}}=t,\qquad \text{azaz}\qquad v=\lambda\sqrt{g}\cdot\mathrm{th}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t.$$

Ezt újra integrálva nyerjük:

$$x-x_0=\int_{x_0}^x dx=\lambda\sqrt{g}\cdot\int_0^t \mathrm{th}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t\cdot dt=$$

$$=\lambda^2\int\frac{\frac{\sqrt{g}}{\lambda}\cdot\mathrm{sh}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t}{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t}\cdot dt=\lambda^2\ln\mathrm{ch}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t.$$

Mivel $\mathrm{ch}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t\to\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t}$, ha $t\to\infty$, és ugyanakkor

$$\ln\mathrm{ch}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t\to\ln\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t}=\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t-\ln 2,$$

ezért azt mondhatjuk, hogy az *esés vége felé a megtett út mindinkább az idő lineáris függvényévé válik!* Ez összhangban van azzal, hogy

$$v=\lambda\sqrt{g}\cdot\mathrm{th}\frac{\sqrt{g}}{\lambda}t\to\lambda\sqrt{g}=v_0,\qquad \text{ha}\qquad t\to\infty$$

értelmében az esés vége felé a *sebesség mindinkább állandósul!* — Eredményünknek jelentősége van ejtőernyős ugrásnál.

[1] Николай: Теоретическая механика.

5. §. IRRACIONÁLIS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

a) Bevezetés. A legegyszerűbb irracionális integrálok

Mint általában, úgy itt is arra törekszünk, hogy az integrálást racionális függvények integrálására vezessük vissza. Igen gyakran éppen ezen *racionalizáló eljárás* megtalálása nehéz. – Sok esetben viszont *trigonometrikus, v. hiperbolikus alakra* hozzuk az integrált, s ezt racionalizáljuk (ha egyszerűbben nem integrálható).

Nézzük most *a legegyszerűbben integrálható irracionális függvényeket!* Eddigi ismereteink alapján járhatunk el ezeknél.

α) $\int \sqrt[m]{(\mathbf{ax+b})^n}\cdot \mathbf{dx}$

$$I=\int (ax+b)^{\frac{n}{m}}dx=\frac{n}{a}\cdot\frac{\sqrt[m]{(ax+b)^{n+m}}}{n+m}+C \qquad \text{(L. 1. §.)}$$

β) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt[m]{(\mathbf{ax+b})^n}}$

$$I=\int (ax+b)^{-\frac{n}{m}}\,dx=\frac{m}{a}\cdot\frac{\sqrt[m]{(ax+b)^{m-n}}}{m-n}+C.$$

(Megjegyezzük, hogy a zárójelben kimondottan csak *lineáris* kifejezés lehet!)

γ) $\int \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\cdot \mathbf{dx}$

Először kiemeljük az integráljel elé a $\sqrt{a}$-t (ha $a>0$), illetőleg a $\sqrt{-a}$-t, (ha $a<0$). A gyök alatt visszamaradó x^2+px+q, ill. $-x^2+px+q$ polinomokat $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, ill. $\left(q-\frac{p^2}{4}\right)-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$ *átalakítás,* majd $u=x\pm\frac{p}{2}$, $du=dx$ *helyettesítés,* és $\left.\begin{matrix}+d^2\\-d^2\end{matrix}\right\}=q-\frac{p^2}{4}\left\}\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}\right.$ jelölés útján az

$$u^2+d^2,\quad u^2-d^2,\quad d^2-u^2$$

normálalakok valamelyikére hozzuk (a $\sqrt{-d^2-u^2}$ 4. lehetséges eset a valósban értelmetlen). Az így nyert

$$\int\sqrt{u^2+d^2}\,du,\quad \int\sqrt{u^2-d^2}\,du,\quad \int\sqrt{d^2-u^2}\,du$$

integrálokat az

$$u=d\operatorname{sh} t,\quad u=d\operatorname{ch} t,\quad u=d\sin t\quad (\text{v. } d\cos t)$$

helyettesítéssel a

$$d^2\int\operatorname{ch}^2 t\,dt,\quad d^2\int\operatorname{sh}^2 t\,dt,\quad d^2\int\cos^2 t\,dt$$

elemi trigonometrikus integrálokra, ezeket pedig a

$$\mathrm{ch}^2\, t=\frac{\mathrm{ch}\, 2t+1}{2}, \quad \mathrm{sh}^2\, t=\frac{\mathrm{ch}\, 2t-1}{2}, \quad \cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$$

azonosságok révén, *alapintegrálokra* vezetjük vissza. Végül a $t=f\left(\frac{u}{d}\right)=f\left(\frac{x\pm p/2}{d}\right)$ inverz felhasználásával visszatérünk az eredeti x-változós alakra.

Itt említjük meg az

$$\int \mathbf{P(x)} \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\, \mathbf{dx}$$

típust, ahol $P(x)$ az x egy polinomja. A gyökös kifejezést az előbbi módon *normálalakra* hozzuk s az ott alkalmas *helyettesítéseket* a $P(x)$-ben és dx-ben is elvégezzük. Ily módon a 2. §-ban már tárgyalt

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx$$

alakú integrálok összegére jutunk.

δ) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}$

Az integrált a γ) alatt részletezett módon az

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+d^2}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-d^2}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{d^2-u^2}}$$

alapintegrálok valamelyikére vezetjük vissza [1. 2. § a. α)] Végül $u=x\pm\frac{p}{2}$ értelemben visszahelyettesítünk.

ε) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{Mx+N}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\, \mathbf{dx}$

Az integrált az

$$I=\int \frac{\left(\frac{M}{2a}\, 2ax+\frac{Mb}{2a}\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+x}} = dx$$

$$=\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

átalakítással láthatóan *az előbbi típusra* vezettük vissza.

Példák és feladatok

α – β | 1. $\displaystyle\int \sqrt[3]{(2x-3)^4}\, dx=\int (2x-3)^{\frac{4}{3}}\, dx=\frac{1}{2}\,\frac{3}{7}\,(2x-3)^{\frac{7}{3}}+C=$

$=\frac{3}{14}\sqrt[3]{(2x-3)^7}+C$

2. $\int \sqrt[4]{(5x-7x)^3}\,dx = \int (5-7x)^{\frac{3}{4}}\,dx = -\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{7}(5-7x)^{\frac{7}{4}} + C =$

$$= -\frac{4}{49}\sqrt[4]{(5-7x)^7} + C$$

3. $\int\limits_1^4 \frac{dt}{\sqrt{5-2t}} = \int\limits_1^4 (5-2t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{2}{2}\left[\sqrt{5-2t}\right]_1^4 = -(1-2) = 1$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+4)^2}} = \int (7x+4)^{-\frac{2}{3}}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{(5x-1)\sqrt{5x-1}}$

6. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot dx = \int \sqrt[8]{x^7}\cdot dx$

7. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

8. $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$

9. $\int\limits_{a_3}^{a} (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\,dx$

10. $\int\limits_0^3 \sqrt{25-3x}\,dx$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{81-65x}}$

γ | 1. $\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = ?$ – Az említett átalakítást végrehajtva:

$I = \int \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx$. Helyettesítve: $x+1=u$, $dx=du$, nyerjük: $I = \int \sqrt{u^2+1}\,du$.

További $u = \operatorname{sh} t$, $du = \operatorname{ch} t\,dt$ helyettesítéssel, majd a $\operatorname{ch}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2}$ azonosság felhasználásával ez adódik:

$$I = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t\,dt + \frac{1}{2}\int dt = \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} + \frac{t}{2} + C.$$

Az $\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}$ azonosság és $t = \operatorname{ar\,sh} u = \operatorname{ar\,sh}(x+1)$ inverz figyelembevételével kapjuk végül:

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} + \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\operatorname{ar\,sh}(x+1) + C.$$

Megjegyzés. Közvetlenül $x+1 = \operatorname{sh} t$ helyettesítést is alkalmazhattunk volna, a gyorsabb megoldás érdekében!

2. $\int \sqrt{4x^2+12x+13} = ?$ – dx. A fenti módon eljárva nyerjük:

$$I = \operatorname{ar\,sh}\left(x+\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+13} + C.$$

Az $\operatorname{ar\,sh} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$ azonosság felhasználásával eredményünk logaritmikus alakban:

$$I=\ln C_1\left[\left(\frac{2x+3}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{2x+3}{2}\right)^2+1}\right]+\frac{2x+3}{4}\sqrt{4x^2+12x+13}=$$

$$=\ln C_2\left[(2x+3)+\sqrt{4x^2+12x+13}\right]+\frac{2x+3}{4}\sqrt{4x^2+12x+13}.$$

3. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=?$ – Az első példa szerint

$I=\int\sqrt{3+1-1-2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$. Itt $u=x+1$, majd $u=2\sin t$ helyettesítés, végül pedig $t=\arc\sin\frac{u}{2}=\arc\sin\frac{x+1}{2}$ visszahelyettesítés.

4. $\int\sqrt{5-3x^2}\,dx$

5. $\int\sqrt{5-2x+x^2}\,dx$

6. $\int\sqrt{10-4x+4x^2}\,dx$

7. $\int_0^4\sqrt{x^2+9}\,dx$

8. $F=2b\int_0^x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$

9. Az $x^2+y^2=25$ egyenletű körív alatti terület az $-3\leq x\leq 4$ szakaszon?

*10. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=?$ – A gyök alatt már normálalak van. Az $x=a\sin u$ helyettesítéssel nyerjük:

$$I=a^6\int\sin^4 u\cos^2 u\,du.$$ Folytassuk az 3. §. b. γ) szerint!

*11. $\int x\sqrt{x-x^2}\cdot dx=?$ – Esetünkben $I=\int x\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot dx.$ Helyettesítés: $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin u$. Folytassuk!

δ 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=?$ – Átalakítva: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}+1\right)}}=$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$. Helyettesítés: $u=x+\frac{1}{2}$, $du=dx$. Ezzel:

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}=\operatorname{ar\,sh}\frac{2u}{\sqrt{3}}+C.$$ Visszahelyettesítés:

$$I=\operatorname{ar\,sh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C=\ln C_1\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]=$$

$$=\ln C_2\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)=\ln C_3\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right).$$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+7x}}=?$ – Hasonló eljárással dolgozunk.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2x+\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2}}.$$ Itt $u=2x+\frac{7}{4}$, $du=2dx$. $I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2}}=$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ar\,ch}\frac{4u}{7}+C=\frac{1}{2}\operatorname{ar\,ch}\frac{8x+7}{7}+C=\frac{1}{2}\ln C\left(2x+\frac{7}{4}+\sqrt{4x^2+7x}\right).$$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}}$

6. $\int\frac{2dx}{\sqrt{5-4x-3x^2}}$

7. $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$

8. $\int\frac{6dx}{\sqrt{9-8x-7x^2}}$

9. $\int_3^4\frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

ε 1. $\int\frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}=?$ – Az ismertetett átalakítással:

$$I=\int\frac{-\frac{8}{8}(-8x+12)+(-3+12)}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}dx=-\int\frac{-8x+12}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}dx+$$

$$+9\int\frac{dx}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}.$$

Az első integrál: $I_1=-2\sqrt{-4x^2+12x-5}$. A második: $I_2=9\int\frac{dx}{\sqrt{4-(2x-3)^2}}=$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2}.$$ Tehát: $$I=-2\sqrt{-4x^2+12x-5}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2}+C.$$

2. $$\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(2-1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} +$$
$$+\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \sqrt{x^2+2x+2} + \operatorname{ar\,sh}(x+1)+C_1 =$$
$$=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln C_2\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right).$$

3. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}$$

4. $$\int \frac{6x+5}{\sqrt{9x^2+1}}\,dx$$

5. $$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-5x+19}}\,dx$$

6. $$\int \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2-4x+5}}\,dx$$

b) Néhány további irracionális függvénytípus integrálása

Az alábbi típusokban már általában magasabb kitevőjű gyökök szerepelnek, vagy több négyzetgyök. (Az R racionális kifejezést jelöl!)

α) $\int R\left(x, x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \ldots, x^{\frac{k}{l}}\right) dx$

Az integrandus tehát törtkitevőjű hatványoknak végesszámú alapművelettel felépített ún. racionális kifejezése. Ez esetben

$x=t^\lambda$, $dx=\lambda t^{\lambda-1}\,dt$ helyettesítéssel racionalizáljuk az integrált, ahol λ a törtkitevők nevezőinek legkisebb közös többszöröse, azaz $\lambda = Lkt\,(b, d, \ldots, l)$. – Megjegyzendő, hogy x helyett $\alpha x+\beta$ is állhat. [Lásd β), δ)!]

β) $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$

Az integrálandó x és $\sqrt[n]{ax+b}$ *racionális kifejezése.* Az

$$u=\sqrt[n]{ax+b}, \qquad u^n=ax+b$$

$$x=\frac{u^n-b}{a} \quad \text{és} \quad dx=\frac{n}{a}u^{n-1}\,du$$

helyettesítéssel már az $\int R(u)\,du$ racionális integrálra jutunk.

*γ) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

Itt az

$$u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad u^n=\frac{ax+b}{cx+d},$$

$$x=\frac{du^n-b}{a-cu^n} \quad \text{és} \quad dx=n\frac{ad-bc}{(a-cu^n)^2}u^{n-1}\,du$$

helyettesítéssel racionalizálunk. (Látható, hogy $ad \neq bc$, mert különben $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = \text{const.}$)

Az említett helyettesítés olykor *más típusú integráloknál is* sikerrel alkalmazható.

***δ) $\int R\left(x \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$**

E típust az előbbihez tartozó

$$\int R\left(x, \sqrt[\lambda]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

alakú integrálra lehet visszavezetni, ahol $\lambda = Lkt\ (n, m, \ldots, p)$.

Ha $c=0$ és $d=1$, akkor a β-hoz tartozó

$$\int R(x) \sqrt[\lambda]{ax+b}\, dx$$

alakú integrálra jutunk.

ε) $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx$

Az integrálandó tehát az x-nek és a két gyöknek végesszámú alapművelettel képzett (racionális kifejezése. Ekkor pl. az $u = \sqrt{ax+b}$,

$$x = \frac{u^2-b}{a}, \qquad dx = \frac{2}{a} u\, du$$

helyettesítés az alább ζ) alatt következő integráltípusra vezet.

ζ) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$

A 4. § α. γ)-ban részletezett *normalizálással* az

$$\int R(u, \sqrt{u^2+d^2})\, du, \qquad \int R(u, \sqrt{u^2-d^2})\, du, \qquad \int R(u, \sqrt{d^2-u^2})\, du$$

alakok valamelyikére, majd az ugyanott tárgyalt trigonometrikus, ill. hiperbolikus *helyettesítéssel* az

$$\int R(\cos t, \sin t)\, dt, \quad \int R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\, dt$$

alakok egyikére jutunk. Ezen integrálok egyszerűbb esetekben a 2. § a. α_4, α_5), vagy a 2. § b. β_3) szerint oldhatók meg; általános esetben pedig a 2. § a. β_3) alatt említett

$$v = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad \text{ill.} \quad v = \operatorname{th} \frac{t}{2}$$

helyettesítéssel az

$$\int R(v)\, dv$$

alakra, vagyis a v mindig integrálható racionális kifejezésre jutunk.

Megjegyzendő, hogy némi gyakorlat után a két utóbbi helyettesítést egyetlen, a normalizált alakot *közvetlenül racionalizáló helyettesítéssel* hidalhatjuk át; pl.:

$$u = d \sin t \quad \text{és} \quad v = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \quad \text{esetén} \quad u = \frac{2dv}{1+v^2}$$

A most tárgyalt fontos integráltípusra vonatkozólag később bemutatjuk még *Euler általános érvényű helyettesítéseit,* továbbá *néhány speciális eljárást* közlünk!

Példák és feladatok

α 1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = ?$ – Esetünkben $\lambda = Lkt\,(3, 2) = 6$, tehát a helyettesítés: $x = t^6$, $dx = 6t^5\,dt$. Így: $I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^2+t^3} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t -$

$- 6 \ln C(t+1) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln C(\sqrt[6]{x}+1).$

2. $\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}$? – Itt $\lambda = 2$ és $1 + x = t^2$. $I = 2\int \frac{t\,dt}{t^3+t} =$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arc\,tg} t + C = 2 \operatorname{arc\,tg}(1+x) + C.$$

3. $\int \frac{dx}{x^{5/8} - x^{1/8}}$

4. $\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/4}+1}$

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

6. $\int \frac{x^{3/8}\,dx}{1+x^{1/2}}$

7. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$

*8. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{x^2}\,dx = ?$ – Itt $u = \frac{1}{x^2}$ választással parciális integrálás, majd $t = \sqrt{x}$; utána: $I = \int \frac{dt}{t^2(1+t^2)}$.

β 1. $\int x \cdot \sqrt[3]{ax+b}\,dx.$ – Itt a helyettesítés: $u = \sqrt[3]{ax+b}$, $u^3 = ax + b$,

$$x = \frac{u^3-b}{a}, \quad dx = \frac{3}{a}u^2\,du. \text{ Ezekkel } I = \int \frac{u^3-b}{a} \cdot u \cdot \frac{3}{a}u^2\,du = \frac{3}{a^2}\int (u^6 - bu^3)\,du =$$

$$= \frac{3}{a^2}\left(\frac{u^7}{7} - b\frac{u^4}{4}\right) + C = \frac{3}{a^2}\left[\frac{1}{7}(ax+b)^{7/3} - \frac{b}{4}(ax+b)^{4/3}\right] + C.$$

2. $\int x\sqrt[3]{2x+1}\,dx = ?$ – Itt $u=\sqrt[3]{2x+1}$ helyettesítéssel egészen hasonló módon nyerjük: $I=\frac{-3}{16}x\sqrt[3]{(2x+1)^4}+\frac{3}{28}\sqrt[3]{(2x+1)^7}+C.$

3. $\int x\sqrt[4]{x-2}\,dx$

4. $\int x\sqrt[3]{(2x-3)^2}\,dx$

5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+a}}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

7. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^{3/2}}$

8. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}$

9. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

10. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$

*γ – δ

1. $\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}\,dx = ?$ – Itt a γ) szerint a helyettesítés:

$$u=\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}},\qquad u^2=\frac{-x+1}{x+1},\qquad x=-\frac{u^2-1}{u^2+1}\quad \text{és}$$

$$dx=2\frac{-1-1}{(-1-u^2)^2}\,u\,du=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\,du.$$

Ezekkel: $I=\int\frac{u^2+1}{u^2-1}\cdot u\cdot\frac{4u}{(u^2+1)^2}\,du=4\int\frac{u^2\,du}{u^4-1}=\frac{4}{2}\int\frac{du}{u^2+1}+\frac{4}{2}\int\frac{du}{u^2-1}=$

$$=2\,\text{arc tg}\,u-2\,\text{ar th}\,u=2\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}-2\,\text{ar th}\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}+C.$$

Átalakítást végzünk; egyrészt: $-2\,\text{ar th}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}=-\frac{2}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=$

$$=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\ln\frac{1+x-2\sqrt{1-x^2}+1-x}{1+x-1+x}=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

másrészt: $2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ és mivel $\cos 2\left(\arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) =$
$= \cos^2\left(\arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) - \sin^2\left(\arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) = \frac{1+x}{2} - \left(1 - \frac{1+x}{2}\right) = x,$
így (mindkét oldal arc cos-át véve) nyerjük:

$$2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Ezek felhasználásával eredményünk így írható:

$$I = \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

Ugyanezt az eredményt nyerjük, ha

$$I = \int \frac{(1-x)\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

értelmében integrálunk!

$$*2. \qquad \int \frac{\sqrt{\frac{2x+3}{3x-1}}}{x^2 \sqrt[3]{\frac{2x+3}{3x-1}}}\,dx.$$

A δ) szerint esetünkben $\lambda = Lkt(2,\ 3) = 6$, vagyis az integrál átalakítható így:

$$I = \int \frac{\sqrt[6]{\left(\frac{2x+3}{3x-1}\right)^3}}{x^2 \sqrt[6]{\left(\frac{2x+3}{3x-1}\right)^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt[6]{\frac{2x+3}{3x-1}}}{x^2}\,dx.$$

Ezzel a γ) típusra jutottunk. Helyettesítés: $u = \sqrt[6]{\frac{2x+3}{3x-1}}$, $x = \frac{-u^6-3}{2-3u^6}$,

$$dx = \frac{6u^5(-2-9)}{(2-3u^6)^2} = \frac{-66u^5}{(2-3u^6)^2}\,du.$$

Ezekkel:

$$I = \int \frac{u}{\left(\frac{u^6+3}{3u^6-2}\right)^2} \cdot \frac{-66u^5}{(3u^6-2)^2}\,du = -66\int \frac{u^6\,du}{(u^6+3)^2} = \frac{-66}{6}\int u\frac{6u^5}{(u^6+3)^2}\,du =$$
$$= 11\frac{u}{u^6+3} - 11\int \frac{du}{u^6+3}.$$

Az integrálandó nevezője – amint összeszorzással (vagy komplex úton) igazolható – a következő módon állítható elő gyöktényezős alakban:

$$u^6+3=(u^2+\sqrt[3]{3})(u^2-\sqrt[3]{9}u+\sqrt[3]{3})(u^2+\sqrt[3]{9}u+\sqrt[3]{3}).$$

Az integrálandó *részlettörtes alakja* tehát:

$$\frac{1}{u^6+3}=\frac{Au+B}{u^2+\sqrt[3]{3}}+\frac{Cu+D}{u^2-\sqrt[3]{9}u+\sqrt[3]{3}}+\frac{Eu+F}{u+\sqrt[3]{9}u+\sqrt[3]{3}}.$$

Folytassuk!

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$. Itt a δ) $c=0$, $d=1$ speciális esetével állunk szemben, amely a β)-ra vezethető vissza. A $\lambda=6$ lévén, a helyettesítés: $u=\sqrt{2x-1}$.

4. $\int\frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$

5. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$

7. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

8. $\int\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}\,dx$

9. $\int\frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$

[A 6., 7., 8., 9. integrált is fentebbi módon és helyettesítéssel oldhatjuk meg, megfelelő átalakítás után!]

*10. $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$. – Itt $t=\sqrt{x+1}$, $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$ helyettesítést alkalmazunk, amellyel: $I=2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt=\int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt=\ln C\,\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-$ $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, ahol $t=\sqrt{x+1}$.

*11. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$. Átalakítva: $I=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}$. Helyettesítés: $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$. Ezzel: $I=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}=\int\frac{-3dt}{t^3-1}=$

$$=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln C\,\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}},\quad \text{ahol}\quad t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

ε | 1. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} \cdot dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$ – Helyettesítés: $u=\sqrt{x}$, $x=u^2$, $dx=2u\,du$.

Ezzel: $I=\int \frac{2u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}}$. Újabb helyettesítés: $u=\cos v$, $du=-\sin v\,dv$. Vele: $I=$

$= -2\int \cos^2 v\,dv = -\int (1+\cos 2v)\,dv = -v-\cos v\sqrt{1-\cos^2 v}+C.$

Visszahelyettesítés: $v=\arccos u=\arccos\sqrt{x}$, amely után végül:

$$I=-\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}+C_1=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}+C_2.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}$. – Itt a nevezőt racionalizáljuk:

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} \cdot \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}} \cdot dx = \int \frac{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})\,dx}{(x+a)-(x-a)} =$$

$$=\frac{1}{2a}\int \sqrt{x+a}\,dx+\frac{1}{2a}\int \sqrt{x-a}\,dx=\frac{1}{3a}\left[(x+a)^{3/2}+(x-a)^{3/2}\right]+C.$$

3. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$ – Itt az $u=\sqrt{1-x}$, vagy $u=\sqrt{1+x}$ helyettesítésnél előnyösebb a nevező racionalizálása:

$$I=\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

4. $\int e^{\operatorname{ar\,th} x}\,dx.$ – Az $\operatorname{ar\,th} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ azonosság felhasználásával írhatjuk: $I=\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$. Tovább a 3. példa szerint!

5. $\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$.

ζ | 1. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx=?$ – A gyökalatti kifejezés normálalakja: $x^2+2x+2=$ $=(x+1)^2+1=u^2+1$, ahol $u=x+1$, $du=dx$. Helyettesítés: $u=\operatorname{sh} t$, $du=\operatorname{ch} t\,dt$.

Ezzel az integrál így alakul: $I=\int \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t-1}\,dt=\int \frac{\operatorname{sh}^2 t+1}{\operatorname{sh} t-1}\,dt.$

A számlálót elosztjuk a nevezővel: $\dfrac{\operatorname{sh}^2 t+1}{\operatorname{ch} t-1}=\operatorname{sh} t+1+\dfrac{2}{\operatorname{sh} t-1}$; így

$$I=\int\left(\operatorname{sh} t+1+\frac{2}{\operatorname{sh} t-1}\right)dt=\operatorname{ch} t+t+2\int\frac{dt}{\operatorname{sh} t-1}.$$

Az utóbbi integrál a $v=\operatorname{th}\dfrac{t}{2}$ helyettesítéssel már kiszámítható. – Folytassuk! A végén visszahelyettesítést eszközöljünk!

2. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx=?$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}=?$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}=?$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=?$

6. $\displaystyle\int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx=?$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=?$

8. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}=?$

9. $\displaystyle\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=?$

*c) Binomiális (Csebüsev-féle) integrálok

Általános alakjuk:

$$\int \mathbf{x}^m(\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{x}^n)^p\,\mathbf{dx},$$

ahol a és b állandók, az $m=\dfrac{k}{\mu}$, $n=\dfrac{l}{v}$ és $p=\dfrac{r}{s}$ pedig *racionális számok.* Az m és n egész számnak tekinthető a továbbiakban, [mert különben az $x=u^q$, $q=Lkt\ (\mu, v)$ helyettesítéssel ez elérhető].

Csebüsev kimutatta, hogy *ezen integráltípus csak az alábbi* 3 *esetben oldható meg elemi úton:*

α) p egész szám [Lásd a 3. § e. β)-t is!] Ekkor $p>o$ esetén a p hatványra emelést (binomiális tétellel) és az x^m-mel való szorzást elvégezve, *polinóm integrálandóra* jutunk. A $p<o$ esetében az $u=x^\sigma$, $\sigma=Lko\,(m+1,\ n)$ értelemben helyettesítünk. – Ezek tehát nem irracionális kifejezések!

β) $\dfrac{m+1}{n}$ egész szám A $z=x^n$ helyettesítéssel az

$$I=\frac{1}{n}\int(a+bz)^{\frac{r}{s}}\cdot z^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot dz=\int R\left(z,\sqrt[s]{a+bz}\right)dz$$

alakra jutunk, amely a b. γ) szerint $u=\sqrt[s]{a+bz}$ helyettesítéssel racionalizálható. Célszerűbb közvetlenül az $u=\sqrt[s]{(a+bx)^n}$ helyettesítés!

$\gamma)$ $\dfrac{m+1}{n}+p$ egész szám

Az előbbi (z-változós) integrált átrendezve

$$I=\frac{1}{n}\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\frac{r}{s}}\cdot z^{\frac{m+1}{n}+p-1}\cdot dz=\int R\left(z,\sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)dz$$

alak adódik, amely a b. $\delta)$ szerint

$$u=\sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}$$

helyettesítéssel racionalizálható. Célszerűbb közvetlenül az

$$u=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$$

helyettesítés!

**$\delta)$ $I_{p,\,q}=\int(a+bz)^p z^q\,dz$

A fentebbiek értelmében csak akkor oldható meg elemi úton, ha p, q és $p+q$ számok valamelyike egész! Néhány gyakran használható *rekurzív formulát* lehet e típusra levezetni. Pl.:

1.	$I_{p,\,q}=-\dfrac{(a+bz)^{p+1}\cdot z^{q+1}}{a(p+1)}+\dfrac{p+q+2}{a(p+1)}\cdot I_{p+1,\,q};$	$p\neq-1$
2.	$I_{p,\,q}=\dfrac{(a+bz)^{p+1}\cdot z^{q+1}}{a(q+1)}-b\dfrac{p+q+2}{a(q+1)}\cdot I_{p,\,q+1};$	$q\neq-1$
3.	$I_{p,\,q}=\dfrac{(a+bz)^{p}\cdot z^{q+1}}{p+q+1}+\dfrac{ap}{p+q+1}\cdot I_{p-1,\,q};$	$p+q\neq-1$
4.	$I_{p,\,q}=\dfrac{(a+bz)^{p+1}\cdot z^{q}}{b(p+q+1)}-\dfrac{aq}{b(p+q+1)}\cdot I_{p,\,q-1};$	$p+q\neq-1$

Ha p, q, $p+q$ egyike sem egész, a formulák értelmetlenné válnak. A c. anyagát lásd bővebben az irodalomban.[1]

Példák és feladatok

*α 1. $\displaystyle\int\frac{x^5\,dx}{(x^2+2)^2}$. – It $m=5$, $n=2$ és $p=-2$, tehát $\sigma=Lko\,(m+1,\ n)=$ $=Lko\,(6,\ 2)=2$. A helyettesítés ily módon: $u=x^\sigma=x^2$, $x=\sqrt{u}$, $dx=\dfrac{du}{2\sqrt{u}}$.

Ezzel:
$$I=\int\frac{x^{5/2}}{(u+2)^2}\cdot\frac{du}{2u^{1/2}}=\frac{1}{2}\int\frac{u^2\,du}{(u+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(u^2-4)+4}{(u+2)^2}\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{u-2}{u+2}\,du+2\int\frac{du}{(u+2)^2}=\frac{1}{2}\int du-2\int\frac{du}{u+2}+2\int\frac{du}{(u+2)^2}=\frac{1}{2}u-2\ln C(u+2)-\frac{2}{u+2}.$$

[1] L. pl. Fihtengolc i. m. II. kötet.

Visszahelyettesítés: $I=\frac{1}{2}(x^2+2)-2\ln C(x^2+2)-\frac{2}{x^2+2}$.

2. $\int\frac{dx}{x(x^3+4)}=\frac{1}{4}\int\frac{(x^3+4)-x^3}{x(x^3+4)}\,dx$

3. $\int\frac{x^3\,dx}{x^8+1}$ 4. $\int\frac{x^5\,dx}{x^4+1}$ 5. $\int\frac{x^5\,dx}{x^{12}-1}$

(Látható, hogy *ezek nem irracionális integrálok!* Csak a Csebüsev-félék teljessége kedvéért tárgyaltuk itt! Lásd még a 3. § e. β) helyen!)

*β 1. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$

Itt $m=-\frac{1}{2},\quad n=\frac{1}{4},\quad p=\frac{1}{3}=\frac{r}{s};$

tehát $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$, egész.

A p nevezője $s=3$ lévén, a helyettesítés:

$$u=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\qquad x=(u^3-1)^4,\qquad dx=12u^2(u^3-1)^3\,du.$$

Ezzel: $I=12\int(u^6-u^3)\,du=\frac{12}{7}u^7-3u^4+C.$

Visszahelyettesítve: $I=\frac{12}{7}(1+x^{1/4})^{7/3}-3(1+x^{1/4})^{4/3}+C.$

2. $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$. – Itt $m=-1$, $n=5$, $p=\frac{r}{s}=-\frac{1}{3}$, tehát $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{5}=0$, egész.

Az $s=3$ lévén a helyettesítés: $u=\sqrt[3]{1+x^5}$.

3. $\int\frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{3/2}}$. – Itt $m=3$, $n=2$, $p=\frac{r}{s}=-\frac{3}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$.

Helyettesítés: $u^2=a+bx^2$.

4. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

5. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

6. $\int t^3(1+2t^2)^{3/2}\,dt$

7. $\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

*γ 1. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\cdot dx.$ – Ez esetben $m=0$, $n=4$,

$p=\frac{r}{s}=\frac{-1}{4}$; ily módon $\frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{4}\neq$ egész, de $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$, egész.

A helyettesítés tehát: $u=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, $x=(u^4-1)^{-1/4}$, $dx=-u^3(u^4-1)^{-5/4}\,du$,

$$\sqrt[4]{1+x^4}=ux=u(u^4-1)^{-1/4}.$$

Ezekkel nyerjük: $I=-\int \frac{u^2}{u-1}\,du=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}=$

$$=\frac{1}{4}\ln C\frac{u+1}{u-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u,\quad \text{ahol}\quad u=\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x}}.$$

2. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}\,dx.$ Itt $m=-4$, $n=2$, $p=\frac{r}{s}=-\frac{1}{2}$;

ily módon $\frac{m+1}{n}=\frac{-4+1}{2}\neq$ egész, de $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$, egész.

A helyettesítés: $u=\sqrt{x^{-2}+1}=\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}$, $\quad x^2=\frac{1}{u^2-1}$, $\quad 1+x^2=\frac{u^2}{u^2-1}$, $\quad \sqrt{1+x^2}=$

$=\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}$, $\quad x=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$, $\quad x^4=\frac{1}{(u^2-1)^2}$, $\quad dx=-\frac{u\,du}{(u^2-1)^{3/2}}$.

Ezekkel nyerjük:

$$I=\int (u^2-1)^2\cdot\frac{(u^2-1)^{1/2}}{u}\cdot\frac{-u\,du}{(u^2-1)^{3/2}}=\int(1-u^2)\,du=u-\frac{u^3}{3}+C.$$

Visszahelyettesítve:

$$I=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3x^3}+C=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

6. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$

4. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\, dx$

7. $\int \frac{dx}{x^2(a+x^3)^{5/3}}$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}\, dx$

8. $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$

9. $\int \frac{dx}{(x^4+1)\sqrt[4]{2x^4+1}} = ?$ – E típusra vezethető vissza!

**δ

1. $H_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, ahol m egész. – Itt $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$. Páratlan m esetén $\frac{m+1}{n}=\frac{m+1}{2}$ egész; páros m esetén $\frac{m+1}{n}+p=\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{m}{2}$, egész. Így mindkét eset integrálható zárt alakban. A $z=x^2$ helyettesítéssel nyerjük:
$H_m=\frac{1}{2}\int (1-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{m-1}{2}}\cdot dz=\frac{1}{2} I_{-\frac{1}{2},\, \frac{m-1}{2}}$. Legyen egyelőre $m-1$ egész! – Akkor a 4. formula szerint írhatjuk:

$$I_{-\frac{1}{2},\, \frac{m-1}{2}} = -2\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{m-1}{2}}}{m}+\frac{m-1}{m}\cdot I_{-\frac{1}{2},\, \frac{m-3}{2}},$$

vagy a másik változatával és jelöléssel:

$$H_m = -\frac{1}{m}\, x^{m-1}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{m-1}{m}\cdot H_{m-2}.$$

Eszerint esetünkben e rekurzív formula lépésenként 2-vel csökkenti x^m kitevőjét. Az utolsó integrál páratlan m esetén:

$$H_1=\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C,$$

páros m esetén:

$$H_0=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C.$$

Legyen most $m< -1$, azaz $m< -n$, ahol $n>1$, egész! – Akkor a 2. formula alapján írható:

$$I_{-\frac{1}{2},\, \frac{m-1}{2}}=\frac{2(1-z)^{\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}+\frac{m+2}{m+1}\cdot I_{-\frac{1}{2},\, \frac{m+1}{2}},$$

vagy
$$H_{-n} = -\frac{x^{-(n-1)}\cdot\sqrt{1-x^2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\cdot H_{-(n-2)}.$$

E formula lépésenként 2-vel emeli az x^m kitevőjét. Az utolsó integrál páratlan m esetén

$$H_{-1} = \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln C\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

páros m esetén:

$$H_{-2} = \int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

2. $\int\frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$ – Itt $m>1$ és páros. Az előbb levezetett rekurzív formula használható, ha figyelembe vesszük, hogy itt $b=+1$, (szemben az előbbi $b=-1$ esettel):

$$H_m = +\frac{1}{m}x^{m-1}\cdot\sqrt{1+x^2} - \frac{m-1}{m}\cdot H_{m-2}.$$

Ezt alkalmazzuk többször egymás után:

$$H_6 = \frac{x^5}{6}\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{6}H_4 = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^4}{24}\right)\sqrt{1+x^2} + \frac{5}{8}H_2 =$$

$$= \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}H_0 = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}\operatorname{ar\,sh} x + C.$$

3. $\int\frac{x^8}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$ – Itt $m>1$ és páros, továbbá $b=1$ és $a=-1$. Így a rekurzív formula:

$$H_m = +\frac{1}{m}x^{m-1}\cdot\sqrt{x^2-1} + \frac{m-1}{m}H_{m-2}.$$ Lásd hátul!

4. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3\cdot\sqrt{x^2+1}}.$ – Az $x^2=z$, $x=\sqrt{z}$, $dx=\frac{dz}{2\sqrt{z}}$ helyettesítéssel:

$$I = \frac{1}{2}\int(1+z)^{\frac{7}{2}}\cdot z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}I_{-\frac{7}{2},\,-\frac{1}{2}}.$$ Az 1. formulával dolgozunk.

5. $I_{n+1} = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}.$ – Az $x^2=z$, $x=\sqrt{z}$, $dx=\frac{dz}{2\sqrt{z}}$

helyettesítéssel nyerjük:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2}\int(a^2+z)^{-n+1}.z^{-\frac{1}{2}}.dz = I_{-(n+1),\,-\frac{1}{2}},$$

ahol $n=1, 2, 3, \ldots$ Az 1. formulával nyerjük:

$$I_{-(n+1), -\frac{1}{2}} = \frac{(a^2+z)^{-n} \cdot z^{\frac{1}{2}}}{na^2} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot I_{-n, -\frac{1}{2}},$$

mely az x változóra átírva a (2. § b. β. 6.-ban megismert):

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-1}{2na^2} \cdot I_n$$

rekurzív formulát szolgáltatja.

** d) Az $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ típusú integrálok megoldása az Euler-féle helyettesítésekkel

A b. ζ) alatt *már racionalizáltuk e típust,* mégpedig *ismételt helyettesítés révén. Ugyanez* **Euler** *valamelyik helyettesítésével közvetlenül is elérhető,* bár nehezebb számítások árán.

Kiemeljük, hogy *az ilyen típusú integrálok mindig* **megoldhatók zárt alakban**; kifejezésükre – a racionális függvények integráljában fellépő függvényeken kívül – csak négyzetgyök szükséges!

Euler (érdekes *geometriai* megoldásokon nyugvó)[1] 3 *helyettesítése* a következő:

α) a>0 Ekkor a helyettesítés:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \mp \sqrt{a}\,x$$

és ennek megfelelően

$$x = \frac{t^2-C}{2\sqrt{a}t+b}; \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}; \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t-b)^2}\,dt.$$

Ha $a>0$ és $c>0$, akkor $x=\frac{1}{z}$ helyettesítés alkalmas.

β) c>0 Ekkor a helyettesítés:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

és ennek megfelelően:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}; \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}; \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

γ) ax^2+bx+c gyökei valósak és különbözők Most a helyettesítés:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda), \quad \text{azaz} \quad t = \sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

[1] L. pl. Fihtengolz i. m. II. kötet.

és ennek megfelelően:

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a}; \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}; \qquad dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

Példák és feladatok

$\alpha-\gamma$

1. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=?$ – Itt $a=1>0$ és a $c=1>0$, tehát az α) és β) helyettesítés egyaránt használható! Lássuk mindkettőt!

Az α) helyettesítéssel:

$$\sqrt{x^2-x+1}=+t-x, \qquad x=\frac{t^2-1}{2t-1}, \qquad dx=2\frac{t^2-1+1}{(2t-1)^2}\,dt.$$

Ezzel: $I=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt$, amely résztörtekre bontás után így alakul:

$$I=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt=-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+2\ln t-\frac{3}{2}\ln(2t-1)+C.$$

Végül a $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$ helyettesítéssel visszatérve az eredeti x változóra:

$$I=-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-\frac{3}{2}\ln\left(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)+2\ln\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)+C.$$

2. Oldjuk meg az előbbi feladatot a β) helyettesítéssel!

Ekkor:

$$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1, \qquad x=\frac{2t-1}{t^2-1}, \qquad dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1}, \qquad x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

Ezekkel:

$$I=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt.$$

Résztörtekre bontás után:

$$I=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt=\frac{3}{t+1}+2\ln t-\frac{1}{2}\ln(t-1)-\frac{3}{2}\ln(t+1)+C'.$$

A $t=\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$ visszahelyettesítéssel nyerjük végül:

$$I = \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1} + 2\ln(\sqrt{x^2-x+1}+1) -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2-x+1}-x+1) - \frac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2-x+1}+x+1) + C'.$$

Átrendezéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez és az előbbi eredmény azonos, és $C' = C + \frac{3}{2}$!

3. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} = ?$ – Mivel a gyök alatti kifejezés gyökei valósak ($+a$, $-a$), így alkalmazható a γ) helyettesítés: $t = \sqrt{-\frac{x+a}{x-a}}$, azaz $t(a-x) = \sqrt{+(a+x)(a-x)} = \sqrt{a^2-x^2}$, ahol $-a < x < a$ és $t > 0$, továbbá $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}$, $\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x)$, $x^2+a^2 = \frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}$.

Ezek felhasználásával írhatjuk:

$$I = \frac{1}{2a^2}\int \frac{2t^2+2}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{2a^2}\int \left[\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right] dt =$$

$= \frac{1}{a^2\sqrt{2}}[\operatorname{arc\,tg}(t\sqrt{2}+1) + \operatorname{arc\,tg}(t\sqrt{2}-1)] + C$. Visszahelyettesítve $t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ értelmében és tekintettel az $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\alpha} = -\operatorname{arc\,tg}\alpha \pm \frac{\pi}{2}$ ($\alpha \gtrless 0$) azonosságra, nyerjük végül:

$$I = \frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}} + C', \quad \text{ahol a} \quad C' = C + \frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}.$$

4. Oldjuk meg az előbbi feladatot a β) helyettesítéssel, azaz most

$$\sqrt{a^2-x^2} = tx - a.$$

5. $\int \frac{dx}{[x^2+\lambda]\sqrt{x^2+\mu}} = ?$ – Az $\sqrt{x^2+\mu} = t - x$, majd $u = t^2$ helyettesítéssel dolgozunk.

*6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C'$. Igazoljuk a γ)-beli Euler-féle helyettesítéssel az ismert eredményt!

Ekkor $\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x)$, azaz $t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$,

$$dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1}.$$

Ezekkel:

$$I=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arc\,tg} t+C=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

Jelölve $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, írhatjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},\qquad \sin\alpha=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x+a-x}}=\sqrt{\frac{a+x}{2a}},\qquad \cos\alpha=\sqrt{\frac{a-x}{2a}},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{a-x}{2a}-\frac{a+x}{2a}=-\frac{x}{a}.$$

Tehát:

$$I=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C=2\alpha+C=\arccos\left(-\frac{x}{a}\right)+C=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(-\frac{x}{a}\right)+C=+\arcsin\frac{x}{a}+C',\qquad \text{ahol}\qquad -a<x<a.$$

7. Oldjuk meg az előbbi feladatot a β)-beli Euler-féle helyettesítéssel!

$$\sqrt{a^2-x^2}=xt-a$$

$$I=-2\int\frac{dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arc\,tg} t+C=-2\operatorname{arc\,tg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C=$$

$$=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a}-\pi+C, & \text{ha}\quad 0<x<a\\[2ex] \arcsin\dfrac{x}{a}+\pi+C, & \text{ha}\quad -a<x<0,\end{cases}$$

ahol végül $C'=-\pi+C$, ill. $C''=+\pi+C$ jelölést vezethetünk be.

**e) Különleges eljárások

Az $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ integrál alábbi speciális eseteiben a b. ζ) és d.-beli általános eljárásnál *előnyösebb* is áll rendelkezésre.

α) $\mathbf{I}_m=\int\frac{\mathbf{x}^m}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\,\mathbf{dx}$

Itt $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; az $m=0$ és 1 eset ismert; lásd: a. ε) és a. ζ). Ez esetben az

$$\left(x^{m-1}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'$$

differenciálási eredményből következő

$$x^{m-1}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}=ma\,I_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bI_{m-1}+(m-1)cI_{m-2}$$

rekurzív formula ismételt alkalmazásával

$$I_m=P_{m-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda_m I_0$$

alakra jutunk, ahol $P_{m-1}(x)$ egy $(m-1)$-fokú polinom és λ_m állandó. A 3. § d.-hez hasonlóan, ilyen értelmű, $P_{m-1}(x)$-ben ismeretlen együtthatójú és ismeretlen λ_m-ű *feltevéssel* is eljárhatunk! (Lásd alább, a β)-ban.)

β) $I_m=\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Az előbbi típusú integrálok összegének tekinthető. Az előbbi rekurzív formula tagonkénti ismételt alkalmazásánál sokkal *célszerűbb* az

$$I_m=Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

feltevéssel eljárni, ahol $Q_{m-1}(x)$ egy $(m-1)$-fokú, ismeretlen együtthatójú polinom és λ ismeretlen állandó. Az ismeretlen állandókat a határozatlan együtthatók módszerével határozzuk meg a (fenti feltevés differenciálása, majd $\sqrt{ax^2+bx+c}$-vel való szorzás útján nyert)

$$P_m(x)=Q'_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{1}{2}Q_m(x)\,(2ax+b)+\lambda$$

azonosság alapján.

γ) $\int\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Az előző általánosabb típusnál bemutatott eljárás helyett ez esetben *célszerűbb, gyorsabb* az adott

$$\int\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \text{ és az } \int\sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx=\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

integrál *párhuzamos* számítása. – Egyszerűbb egy példán bemutatni a módszert!

δ) $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, $\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,.dx$

Olykor előnyös eme a. γ) δ) alatt tárgyalt típusokat az

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\qquad \int\frac{P(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

alakra hozni és az e. β)-beli eljárással megoldani.

ε) $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Ez esetben az $x-\alpha=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$,

$$ax^2+bx+c=\frac{(\alpha^2a+\alpha b+c)t^2+(2\alpha a+b)t+a}{t^2}$$

helyettesítéssel ($x>\alpha$ és $t>0$)

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{t^{k-1}\cdot dt}{\sqrt{(\alpha^2a+\alpha b+c)t^2+(2\alpha a+b)t+a}}$$

alakra jutunk, mely már az e. α) alatti típusú!

ζ) $\int\frac{P_n(x)\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Az $x-\alpha=\frac{1}{t}$ helyettesítéssel az e. γ) esetre vezethető vissza!

$\eta-\varkappa$ $$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2m}}}, \quad \int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+q)^n \cdot \sqrt{ax^2+c}},$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \frac{P_n(x)dx}{Q_m(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

A fentebbi és egyéb bonyolultabb integrálok tárgyalására itt nincs terünk (legfeljebb egy-két példát adunk mutatóba), hanem az *irodalomra utalunk.*[1]

Az $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ típusú integrálokat célszerű az e)-ben tárgyaltak valamelyikére visszavezetni. Ehhez elégséges *a nevezőből az irracionalitást eltávolítani* és (a $\sqrt{Y}=\sqrt{ax^2+bx+c}$ jelöléssel élve) az $R_1(x, \sqrt{Y})$-t az $R_2(x)+R_3(x)\sqrt{Y}$ *alakra hozni.* További

$$R_3(x)\sqrt{Y}=\frac{R_3(x)Y}{\sqrt{Y}}=\frac{R_4(x)}{\sqrt{Y}}$$

átalakítással már ismert típusra jutunk. [Itt R az utána (zárójelben) következő függvények racionális kifejezését jelenti.]

Példák és feladatok

$\alpha-\varkappa$ 1. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=?$ – A β)-ban ismertetett módon eljárva:

$$I=[ax^2+bx+c]\sqrt{x^2+2x+2}+d\,.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

minthogy $P_3(x)=x^3-x+1$ harmadfokú polinóm és ennek megfelelően $Q_2(x)$ másodfokú. Az a, b, c és d egyelőre ismeretlen együtthatók. Mindkét oldalt differenciálva, majd a gyökkel szorozva, nyerjük:

$$x^3-x+1=(2ax+b)(x^2+2x+2)+(ax^2+bx+c)(x+1)+d\,.$$

A kijelölt szorzásokat elvégezve, összevonva és a két oldal megfelelő együtthatóit egyeztetve, a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$3a=1, \quad 5a+2b=0, \quad 4a+3b+c=-1, \quad 2b+c+d=1,$$

amelynek megoldása:

$$a=\frac{1}{3}, \quad b=-\frac{5}{6}, \quad c=\frac{1}{6}, \quad d=\frac{5}{2}.$$

Ezek felhasználásával írhatjuk végül:

$$I=\frac{1}{6}[2x^2-5x+1]\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\,\text{ar sh}\,[x+1]+C.$$

[1] Lásd Gjunter–Kuzmin i. m. II.–Fihtengolc i. m. II.

2. $\int \frac{dx}{[x-1]^3 \cdot \sqrt{x^2-2x-1}} = ?$ – Az ε) szerint $x-1=\frac{1}{t}$ helyettesítéssel [ahol $x>1$ és $t>0$] élve nyerjük:

$$I = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-2t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(1-2t^2)-1}{\sqrt{1-2t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2t^2}\cdot dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{2}t\cdot\sqrt{1-2t^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin t\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin t\sqrt{2} + C =$$

$$= \frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin t\sqrt{2} + C.$$

3. $\int \frac{dx}{(2x^2-x+2)^{7/2}} = ?$ – Az η)-ban ismertetett *Abel*-féle helyettesítést alkalmazzuk:

$$t = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}, \text{ amivel az integrál az}$$

$$I = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m \int (a-t^2)^{m-1}\,dt = \left(\frac{4}{4\cdot 2\cdot 2-1}\right)^3 \cdot \int (2-t^2)^2\,dt =$$

$$= \frac{64}{3375}\int (4-4t^2+t^4)\,dt \text{ alakba megy át, } \left(\frac{m+1}{2}=\frac{7}{2},\quad m=3\right).$$

Tagonként integrálva, és visszahelyettesítve nyerjük végül:

$$I = \frac{64}{3375}\left[2\frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{(4x-1)^3}{(2x^2-x+2)^{3/2}} + \frac{1}{160}\frac{(4x-1)^5}{(2x^2-x+2)^{5/2}} + C.\right.$$

Felhívjuk a figyelmet ezen eljárás eleganciájára!

4. $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = ?$ – Esetünkben a 2. szerint: $x^2+px+q=x^2-x+1$ és $ax^2+bx+c=a(x^2+p'x+q')=x^2+x+1$, tehát $p=-1\neq p'=+1$. Ennélfogva a helyettesítés: $x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$, ahol μ és ν egyelőre ismeretlen állandók. Meghatározásuk:

$$x^2+x+1 = \frac{(\mu^2\pm\mu+1)t^2 + [2\mu\nu\pm(\mu+\nu+2)]t + (\nu^2\pm\nu+1)}{(t+1)^2},$$

ahonnan (mindkét esetben a számlálóbeli t-s tag kiesését követelve) nyerjük:

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu\nu+(\mu+\nu)+2=0 \\ 2\mu\nu-(\mu+\nu)+2=0 \end{array}\right\} \quad \text{azaz} \quad \mu+\nu=0 \quad \text{és} \quad \mu\nu=-1,$$

ily módon $\mu=1$, $\nu=-1$ és ezekkel végül is

$$x=\frac{t-1}{t+1}, \quad dx=\frac{2\,dt}{[t+1]^2}, \quad x+3=\frac{4t+2}{t+1},$$

$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{[t+1]^2}, \quad \sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1}.$$

Ezek felhasználásával:

$$I=\int\frac{[8t+4]\,dt}{[t^2+3]\sqrt{3t^2+1}}=\frac{8}{3}\int\frac{3t\,dt}{[t^2+3]\sqrt{3t^2+1}}+4\int\frac{dt}{[t^2+3]\sqrt{3t^2+1}}.$$

Az első integrálnál az $u=\sqrt{3t^2+1}$, $du=\dfrac{3t\,dt}{\sqrt{3t^2+1}}$

helyettesítés az $$I_1=\sqrt{8}\,\text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{8}}+C_1$$

eredményre, a másodiknál az $u=\dfrac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}$ *Abel*-féle helyettesítés pedig az

$$I_2=12\int\frac{du}{\sqrt{27-8u^2}}=\frac{12}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{8}}\,\text{ar th}\,u\sqrt{\frac{8}{27}}+C_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}+C_2$$

eredményre vezet. Végül vissza kell térni a t, majd az eredeti x változóra!

5. $\displaystyle\int\frac{[x^2+1]\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\cdot dx=?$ – Először alakítsuk át az integrálandót a λ) szerint:

$$f(x)=\frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1}-\frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=$$

$$=(2x^3-x^2+3x-3]+\frac{4}{x+1}-\frac{2x^4+3x^2-3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

A 3. tag a β) szerint, a 4. pedig az ε) szerint integrálható!

Műszaki alkalmazások

1. *Egyenes elektromos vezető mágneses tere.*[1]

Egyenes, I erősségű áramot vezető drót megjelölt dl eleme – a *Biot–Savart-törvény* szerint – a P pontban elhelyezett egységnyi mágneses mennyiségre

$$dH=\frac{I}{c}\,\frac{dl\sin\varphi}{r^2}$$

[1] Fihtengolc i. m. II. kötet.

mágneses erőt gyakorol. (Itt c dimenziós állandó.) Helyettesítve:

$$\sin\varphi = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2+l^2}}, \qquad r^2 = \varrho^2 + l^2,$$

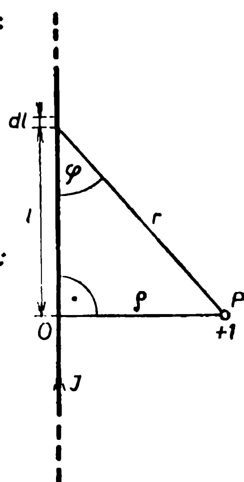
nyerjük:

$$dH = \frac{I\varrho}{c} \frac{dl}{(\varrho^2+l^2)^{3/2}}.$$

A vezető $-L \leq l \leq +L$ darabja által a *P-re gyakorolt erő:*

$$H_L = \frac{I\varrho}{c} \int_{-L}^{+L} \frac{dl}{(\varrho^2+l^2)^{3/2}} = \frac{2I\varrho}{c} \int_{0}^{+L} \frac{dl}{(\varrho^2+l^2)^{3/2}};$$

ha pedig *mindkét irányban végtelenbe nyúlik a vezető,* akkor:



30. ábra

$$H_\infty = \lim_{L\to\infty} \frac{2I\varrho}{c} \int_0^{+L} \frac{dl}{(\varrho^2+l^2)^{3/2}} = \frac{2I\varrho}{c} \int_0^{+\infty} \frac{dl}{(\varrho^2+l^2)^{3/2}},$$

(amennyiben e határértéknek egyáltalán van értelme).

Az $l = \varrho \operatorname{tg} \varphi$, $\quad dl = \frac{\varrho d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\quad \frac{1}{(\varrho^2+l^2)^{3/2}} = \frac{1}{\varrho^3(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{3/2}} = \frac{\cos^3\varphi}{\varrho^3}$

helyettesítéssel nyerjük:

$$H_L = \frac{2I\varrho}{c} \int_{\varphi=0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{L}{\varrho}} \frac{\cos^3\varphi \cdot \varrho d\varphi}{\varrho^3 \cdot \cos^2\varphi} = \frac{2I}{c\varrho} \int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{L}{\varrho}} \cos\varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{2I}{c\varrho} \cdot \Big[\sin\varphi\Big]_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{L}{\varrho}} = \frac{2I}{c\varrho} \left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}\right]_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{L}{\varrho}} = \frac{2I}{c\varrho} \cdot \frac{L}{\sqrt{\varrho^2+L^2}} = \frac{2IL}{c\varrho R}.$$

Ebből:

$$H_\infty = \lim_{L\to\infty} H_L = \frac{2I}{c\varrho} \cdot \lim_{L\to\infty} \frac{L}{\sqrt{L^2+\varrho^2}} = \frac{2I}{c\varrho}.$$

A $\lim\limits_{L\to\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{L}{\varrho} = \frac{\pi}{2}$ lévén, a H_∞-t *számíthattuk volna közvetlenül:*

$$H_\infty = \frac{2I}{c\varrho} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot d\varphi$$

módon!

Végezzük el újból az integrálást az $l = \frac{1}{t}$ *helyettesítéssel!*

2. *A harmonikus rezgőmozgás időbeli lefolyása.*[1]

Jelölje x a kitérést, v a sebességet, a a gyorsulást; 0-indexszel jelöljük a $t=0$ időpontbeli értékeket.

A harmonikus rezgőmozgás *jellemző egyenlete:*

$$a = -\alpha^2 \cdot x,$$

ahol α^2 pozitív állandó. Mivel

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}, \quad \text{azaz} \quad a\,dx = v\,dv, \quad \text{azért írható:}$$

$$-\alpha^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv, \qquad -\alpha^2 \frac{x^2 - x^2}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

és ha a rezgő tömeg $t=0$ időpontban éppen nyugalmi helyzetben van $(x_0=0)$, akkor

$$-\alpha^2 x^2 = v^2 - v_0^2, \qquad \text{azaz} \qquad v = \sqrt{v_0^2 - \alpha^2 x^2}.$$

Minthogy továbbá

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \alpha^2 x^2}},$$

ezért:

$$\int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \alpha^2 x^2}} = \frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha x}{v_0},$$

ahonnan:

$$t = \frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha x}{v_0}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\alpha x}{v_0} = \sin \alpha t,$$

$$x = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Ezzel nyertük a rezgő tömegpont *kitérését az idő függvényében!* Belőle differenciálással nyerhető *a sebesség és a gyorsulás, mint az idő függvénye:*

$$v = v_0 \cos \alpha t; \qquad \alpha = -\alpha v_0 \sin \alpha t = -\alpha^2 \cdot \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t = -\alpha^2 x,$$

amiből kiindultunk. – Látható, hogy a harmonikus rezgőmozgás előállítható egy α szögsebességű, v_0 kerületi sebességű $\left(\text{tehát } r = \frac{v_0}{\alpha} \text{ sugarú körön lefolyó}\right)$ *egyenletes körmozgás vetületeként!*

[1] L. Muttnyánszky: Kinetika.

6. §. TRIGONOMETRIKUS, EXPONENCIÁLIS, HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK INTEGRÁLÁSA

A helyettesítés és a parciális integrálás módszerének tárgyalásánál, majd pedig egyes racionális és irracionális függvények integrálása kapcsán *számos idetartozó integráltípussal találkoztunk már. E helyen ezeket rendszerbe foglaljuk és kiegészítjük.* Ezzel egyszersmind alkalmat adunk e nagyrészt egyszerű, mégis a műszaki tudományokban, sőt a praxisban is sűrűn előforduló integráltípusok *átismétlésére.* (A határozott integrál tanulmányozása előtt hasznos előkészületnek fog bizonyulni!)

a) Trigonometrikus függvények integrálása

α) $\int \sin^{2k+1} x\, dx, \quad \int \cos^{2k+1} x\, dx$ — A k + egész. L. 2. §. a. α_4) alatt!

Pl.: $$\int \sin^{2k+1} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cdot \sin x\, dx = -\int (1-u^2)^k\, du,$$

ahol $u = \cos x$, $du = -\sin x\, dx$ helyettesítéssel éltünk.

β) $\int \sin^{2k} x\, dx, \quad \int \cos^{2k} x\, dx$ — A k + egész.
L. a 2. §. b. β_3) alatti lehasító módszert és rekurzív formulát stb.

Pl.: $C_n = \int \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x\, dx = \ldots,$ ahol $n = 2k$, (de $2k+1$ is lehet).

$$C_n = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot C_{n-2} \quad ; \quad S_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot S_{n-2} .$$

*γ) $S_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad C_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ — Az n + egész.
Az előző rekurzív képleteket C_{n-2}-re, ill. S_{n-2}-re megoldva, majd bennük az $(n-2) \sim (-n)$ betűcserét alkalmazva, a következő *rekurzív formulákat* kapjuk:

$$S_{-n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\cdot S_{-(n-2)},$$

$$C_{-n} = +\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\cdot C_{-(n-2)}.$$

Velük $n=1$, v. 2-ig dolgozunk; az $\int \frac{dx}{\cos x}$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ már elemi integrál.

δ) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$

Az *előző 3 esetet is magába foglaló típus!* Vizsgáljuk általánosabb feltételek mellett! Legyen egyelőre n és m egész szám!

δ_1) **n (vagy m) páratlan.** Ekkor, mint már a 2. §. α_5)-ben láttuk pozitív m- és n-re, az $u=\cos x$ (vagy $u=\sin x$) helyettesítéssel racionalizáljuk az integrált.

δ_2) **n és m páros** (vagy mindkettő páratlan). Ez esetben $u=\operatorname{tg} x$, vagy $u=\operatorname{ctg} x$ helyettesítés célszerű.

δ_3) **n és m páros és pozitív.** Ez esetben az

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

azonosságok (esetleg ismételt) alkalmazásával juthatunk a δ_1) típusú és még elemibb integrálokra.

Legyen alább az n és m közül legalább *az egyik tört* szám!

δ_4) **n és m racionális** és $\frac{m-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{m+n}{2}$ **valamelyike egész szám.**

Ilyenkor az

$$\int \sin^n x\cdot\cos^m x\,dx=\frac{1}{2}\int \sin^{n-1}x\cdot(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\sin x\cos x\,dx$$

integrálunk az $z=\sin^2 x$, $dz=2\sin x\cos x\,dx$ helyettesítéssel az

$$\frac{1}{2}\int z^{\frac{n-1}{2}}\cdot(1-z)^{\frac{m-1}{2}}\cdot dz=\frac{1}{2}I_{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}$$

binomiális alakba megy át ($a=1$, $b=-1, p=\frac{m-1}{2}$ és $q=\frac{n-1}{2}$ speciális esetébe), amely a 4. §. c. δ) alatt említett *rekurzív formulák* (ill. trigonometrikus alakjuk) segítségével elemi (trigonometrikus) integrálokra vezethető vissza.

ε) $\mathrm{T}_n=\int \operatorname{tg}^n x\,dx$. $\mathrm{Ct}_n=\int \operatorname{ctg}^n x\,dx$

Ekkor pl. az elsőnél a $t=\operatorname{tg} x$, $x=\operatorname{arc\,tg} t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ helyettesítést alkalmazzuk.

A $t^n:(t^2+1)=t^{n-2}-\frac{t^{n-2}}{t^2+1}$ osztási eredmény felhasználásával nyerjük a következő *rekurzív képletet:*

$$T_n=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-T_{n-2}.$$

A másodiknál ($t=\operatorname{ctg}x$, $dx=-\frac{dt}{1+t^2}$ helyettesítéssel) hasonlóan:

$$Ct_n=-\frac{1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1}x+Ct_{n-2}.$$

ζ) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx.$ *Ez az* (előbbieket is felölelő) *általános integráltípus mindig* **megoldható elemi úton;** a határozatlan integrál kifejezésére csak trigonometrikus függvények szükségesek, a racionális függvényekében szereplőkön kívül.

ζ_1) Az $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ alakú integrálok az $\mathbf{t}=\mathbf{tg}\,\frac{\mathbf{x}}{2}$ helyettesítéssel racionalizálhatók. Következésképpen: $x=2\operatorname{arc\,tg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, továbbá

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ezekkel tehát az integrál az $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)\,dt$ alakba megy át.

*ζ_2) Ezen *általános érvényű*, de akárhányszor igen *bonyodalmas* módszer helyett az a. α) – ε) típusoknál az ott bemutatott eljárások előnyösek. – Továbbá, *ha az integrálandó az* $u=\sin x$ *és* $v=\cos x$ *függvények egyikében páratlan, ill. mindkettőben egyidejűleg páros magatartást tanúsít, akkor* a $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyett *célszerűbb az alábbi helyettesítések alkalmazása:*[1]

1. Ha $\mathbf{R(-u, v)=-R(u, v)}$, akkor $\mathbf{t=\cos x}$.
2. Ha $\mathbf{R(u, -v)=-R(u, v)}$, akkor $\mathbf{t=\sin x}$.
3. Ha $\mathbf{R(-u, -v)=R(u, v)}$, akkor $\mathbf{t=tg\, x}$.

[1] Lásd részletesebben Fihtengolc i. m., II. kötet.

Megjegyzendő, hogy bármilyen $R(u, v)$ függvény előállítható

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, -v)R(u, v)}{2}$$

módon.

η) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \sin nx\, dx$ | E trigonometrikus szorzatok integrálását az alábbi azonosságok segítségével *trigonometrikus összegek integrálására vezetjük vissza:*

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n) x + \cos (m-n) x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [-\cos (m+n) x + \cos (m-n) x]$$

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n) x - \sin (m-n) x]$$

ϑ) $\sqrt{\pm a^2 \mp x^2}$ | gyöktelenítése. L. pl. 4. §. a. γ)-ban. Alkalmazzuk az $x = a \cdot \sin t$, vagy $x = a \cdot \cos t$, ill. az $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ *helyettesítést!*

ι) $\int x^n \cdot \begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} dx$; $\int e^{ax} \cdot \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} dx$; $\int x^n e^{ax} \cdot \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} dx$

A parciális integrálás ismételt (az 1. és 3-nál n-szeri, a 2-nél kétszeri) alkalmazásával, ún. *rekurzív eljárással* oldhatók meg. A 2. §. b. β) alatt részletesen tárgyaltuk mindhárom típust.

$\varkappa$) $\int \text{arc}\ldots x\, dx$, $\int x^n \cdot \text{arc}\ldots x\, dx$. | Mint a 2. §. b. α) alatt láttuk, az első típus egyszeri *parciális integrálással* megoldható; a másodikat egyszeri parciális integrálással $\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx$ alakú integrálokra vezetjük vissza. Ezek a 4. §. e. α) szerint, ill. (osztás után) polinom és $\frac{x}{1+x^2}$ integrálás útján oldhatók meg.

Példák és feladatok

$\alpha - \beta$ | Lásd a 2. §. a. α_4) és a 2. §. b. β_3) helyen is!

1. $\int \sin^5 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot (-\sin x\, dx) = -\int (1-u^2)^2\, du = -u + \frac{2}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + {}$

$+ C = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$

2. $\int \cos^4 x\, dx = \int \underset{u}{\cos^3 x} \cdot \underset{v'}{\cos x}\, dx = \cos^3 x \cdot \sin x + 3 \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x\, dx = \cos^3 x \cdot$
$\cdot \sin x + 3 \int \cos^2 x \cdot dx - 3 \int \cos^4 x\, dx.$

Rendezés után:

$$I = \frac{1}{4} \cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{8} x + \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + C.$$

3. $\int \sin^3 x \cdot dx$

4. $\int \cos^5 x \cdot dx$

5. $\int \cos^6 \varphi \cdot d\varphi$

6. $\int \sin^4 t \cdot dt.$

*γ

1. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. – A megadott rekurzív formula szerint:

$$S_{-4} = -\frac{1}{4-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{4-2}{4-1} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} -$$

$$-\frac{2}{3} \operatorname{ctg} x + C = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{3} \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} x + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C.$$

*2. Speciálisan az $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ és az $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ egyszerűbben is megoldható! Pl.:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$. – A rekurzív képlettel!

4. Hasonló módon: $S_{-3} = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

5. Oldjuk meg az előbbi feladatot

$$S_{-3} = \int \frac{dx}{\sin^3 x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = -\int \frac{-\sin x\, dx}{(1 - \cos^2 x)^2}$$

átalakulás után, $u = \cos x$ helyettesítéssel!

*δ

1. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx.$ – Az integrálandó előjelet vált, ha $\cos x$-et $-\cos x$-re cseréljük, lévén $m = 3$, páratlan. A δ_1) esettel van tehát dolgunk. A helyettesítés: $t = \sin x$, $dt = +\cos x \cdot dx$. Ezzel:

$$I = \int t^2 (1 - t^2) \cdot dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \cdot \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

2. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\, dx$. – Itt is δ_1) esetről van szó! Ez esetben $n=5$, páratlan, tehát a $\sin x$-et $-\sin x$-re cserélve, az integrálandó előjelet vált.

A helyettesítés: $t=\cos x$. (L. hátul!)

3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$. – Itt $n=-4$, $m=-2$, mindkettő páros, tehát az integrálandó nem vált előjelet, ha $\sin x$ helyett $-\sin x$-et, vagy $\cos x$ helyett $-\cos x$-et írunk. Ez a δ_2) eset! A helyettesítés: $t=\operatorname{tg} x$, $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$, $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\sin x$, $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\cos x$.

Ezekkel:

$$I=\int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\cdot dt=t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}+C=\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C.$$

4. $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\cdot dx$. – Itt $n=+2$, $m=+4$, vagyis a δ_3) eset áll előttünk. Ez esetben is megfelelő lenne az előbbi helyettesítés, de előnyösebb a kétszeres szögek formulája alapján az ismertetett módon eljárni!

Eszerint:

$$\sin^2 x\cdot\cos^4 x=\frac{1}{8}\cdot\sin^2 2x\cdot(1+\cos 2x)=\frac{1}{8}\sin^2 2x\cdot\cos 2x+\frac{1}{16}(1-\cos 4x).$$

Ezt felhasználva:

$$I=\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+C.$$

*5. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}$. – Itt $n=-2$, $m=-1$; $\frac{m-1}{2}=-1$, egész. Megfelel a $t=\sin x$ helyettesítés is, de egyszerűbb a δ_4)-beli 2. formula alkalmazása:

$$I=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

6. $\int\frac{dx}{\cos^5 x}$. – Alkalmazható a $t=\sin x$ helyettesítés, de kedvezőbb *kétszer* felhasználni a δ_4)-beli 1. formulát. (L. hátul!)

7. $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx$. – Itt megfelelő a $t=\cos x$ helyettesítés, de egyszerűbb a δ_4) alatti 2. és 3. formula alkalmazása. (L. hátul!)

8. $\int \sin^{3/7} x\cdot\cos^3 x\cdot dx$. Itt $n=\frac{3}{7}$, $m=3$; $\frac{m-1}{2}=1$, tehát zárt alakban megoldható! A δ_4) alatti 3. formula helyettesítéssel közvetlenül megoldható integrálra vezet. (L. hátul!)

9. $\int\frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

10. $\int \sin^2 x\cdot\cos^5 x\, dx$

11. $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$

12. $\int \cos^6 x \cdot \sin^2 x\,dx$

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin x\,dx$

14. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,dx$

15. $\int \sin^4 t \cdot \cos^4 t\,dt$

ε 1. $\int \mathrm{tg}^4\, x \cdot dx$. – A közölt rekurzív képlet *kétszeri* felhasználásával nyerjük:

$$T_4 = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3\, x - T_2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3\, x - \mathrm{tg}\, x + x + C.$$

2. $\int \mathrm{tg}^5\, x \cdot dx$. – A rekurzív formula *ismételt* alkalmazásával!

$$T_5 = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4\, x - T_3 = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4\, x - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\, x + T_1 = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4\, x - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\, x - \ln\cos x + C.$$

3. $\int \mathrm{tg}^2\, x \cdot dx$. – Számítsuk más úton!

$$T_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

4. $\int \mathrm{ctg}^3\, x\,dx$

5. $\int \mathrm{ctg}^4 \frac{x}{3} \cdot dx$

6. $\int \mathrm{ctg}^5\, x \cdot dx$

7. $\int (\mathrm{ctg}^2\, x + \mathrm{tg}^4\, x)\,dx$

8. $\int (\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x)^3 \cdot dx$

ζ ζ_1) 1. $\int \frac{(1+\sin x)\cdot dx}{\sin x\,(1+\cos x)}$. – Az integrálandó a $\sin x$ és $\cos x$ racionális törtfüggvénye. A $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ általános helyettesítéssel nyerjük:

$$I = \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{2}{2}\int \frac{1+t^2+2t}{t+t^3+t-t^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+2t+t^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+2+t\right)\cdot dt = \frac{1}{2}\left(\ln t + 2t + \frac{t^2}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. – Hasonló helyettesítéssel oldjuk meg!

$$I=\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,dt=2\int \frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+C.$$

3. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. – Alkalmazhatnók hasonlóan a $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítést, de *egyszerűbb* így eljárni:

$$I=\int \frac{dx}{\frac{1+\cos x}{2}\cdot 2}=\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot 2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

4. $\frac{1}{2}\int \frac{(1-r^2)\,dx}{1-2r\cos x+r^2}$, ahol $0<r<1$ és $-\pi<x<+\pi$.

A $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ általános helyettesítéssel ez adódik:

$$I=(1-r^2)\cdot\int \frac{dt}{(1-r^2)+(1+r)^2\cdot t^2}=\frac{1-r^2}{(1-r)(1+r)}\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+$$

$$+C=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

5. $\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\cdot dx$. – Egyszerű átalakítással, majd az előbbi eredmény felhasználásával nyerjük!

$$I=\int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right]\cdot dx=\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

*6. $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$, ahol $|a|\gtrless|b|$ és $-\pi<x<\pi$. – Legyen először $|a|>|b|$ és $a>0$.

A $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel a következő eredmény nyerhető:

$$I=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Az eredmény ilyen alakban is előállítható:

$I=\mp\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\arcsin\frac{a\cdot\cos x+b}{a+b\cdot\cos x}+C_1$, ahol a felső előjel az $0\leqq x\leqq\pi$, az alsó az $-\pi<$

$<x\leq 0$ esetre vonatkozik és a C_1 az $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ értékkel nő, amint az x a 0-on áthalad.

Legyen most $|a|<|b|$ és $b>0$. Ugyanazon helyettesítéssel:

$$I=\int\frac{2dt}{(b+a)-(b-a)\cdot t^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln C\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\cdot t}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\cdot t}.$$

Ez előállítható ilyen alakban is:

$$I=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln C\frac{b+a\cdot\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin x}{a+b\cdot\cos x}.$$

Az $x=\frac{\pi}{2}\pm u$ helyettesítéssel az előbbi esetre vezethető vissza: $\int\frac{dx}{a+b\cdot\sin x}$.

7. $\int\frac{dx}{a+b\cdot\cos x+c\cdot\sin x}$. – A $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$ és $\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$ jelöléssel az integrál így alakul:

$$I=\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cdot\cos(x-\alpha)}.$$

Az $u=x-\alpha$ helyettesítéssel a 6. példabeli esetre jutunk, ha $|a|\gtrless\sqrt{b^2+c^2}$.

8. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$

9. $\int\frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$

10. $\int\frac{\cos x\cdot dx}{1+\cos x}$

11. $\int_0^{\pi/4}\frac{(\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi}{3+\sin 2\varphi}$

12. $\int_0^{\pi}\frac{du}{3+2\cos u}$

13. $\int\frac{dx}{4-5\cdot\sin x}$

14. $\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}$

15. $\int\frac{dx}{5-4\cos x}$

ξ_2) 16. $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos 2x}=\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}=?$ – Az integrálandó előjelet vált, ha $\sin x$-et $-\sin x$-re cseréljük, mivel első hatványon szerepel. Tehát az 1. esettel van dolgunk! A helyettesítés: $t=\cos x$. Ezzel:

$$I=-\int\frac{-\sin x\,dx}{\sin^2 x(2\cos^2 x-1)}=+\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}=$$

$$=\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})}.$$

Részlettörtekre bontva és ezeket integrálva nyerjük:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln C \frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x} + \ln C \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

17. $\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$ – Egyidejűleg változtatva a $\sin x$ és $\cos x$ előjelét, az integrálandó változatlan előjelű marad! Ez a 3. eset! A helyettesítés: $t = \operatorname{tg} x$.

18. $\int \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \sin x \cdot \cos xtC \sin^2 x}$, ahol

$$AC - B^2 > 0, \quad \text{és} \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}.$$

A $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel ilyen alakra hozható az integrál:

$$I = \int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}. \quad \text{Tovább a } 3b.\ \delta) \text{ szerint!}$$

19. $\int \frac{dx}{a + b \cdot \operatorname{tg} x}$, ahol $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. – Ez esetben a $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítést alkalmazzuk! (Lásd hátul!)

*20 – 21. $I_1 = \int \frac{\sin x \cdot dx}{a \cdot \cos x + b \cdot \sin x}$, $\quad I_2 = \int \frac{\cos x \cdot dx}{a \cdot \cos x + b \cdot \sin x}$.

A két integrál kapcsolata:

$$b \cdot I_1 + a \cdot I_2 = \int dx = x + C_1,$$

továbbá

$$-a \cdot I_1 + b \cdot I_2 = \int \frac{-a \sin x + b \cdot \cos x}{a \cdot \cos x + b \cdot \sin x} dx = \ln(a \cos x + b \cdot \sin x) + C_2.$$

Az egyenletrendszert megoldva, nyerjük:

$$I_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} [bx - a \cdot \ln(a \cos x + b \sin x)] + C^*$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b \ln(a \cdot \cos x + b \cdot \sin x)] + C^{**}$$

η 1. $\int \cos 2x \cdot \sin 3x \cdot dx.$ – A 3. azonosság felhasználásával írhatjuk:

$$I = \frac{1}{2} \int \sin(2+3)x \cdot dx - \frac{1}{2} \int \sin(2-3)x \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 5x \cdot dx + \frac{1}{2} \int \sin x \cdot dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

2. $\int \sin 5\varphi \cdot \sin 6\varphi \cdot d\varphi$. – A 2. azonosság alapján!

3. $\int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

4. $\int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

5. $\int \sin nx \cdot \cos mx \cdot dx = -\frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} - \frac{\cos(n-m)}{2(n-m)} + C.$

6. $\int \cos 4s \cdot \cos 7s \cdot ds$ 7. $\int \cos\frac{3}{4} \cdot \sin\frac{1}{4} x \cdot dx.$

ϑ) 1. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. – Az $x = a \cdot \sin t$, $dx = a \cdot \cos t \cdot dt$ helyettesítést alkalmazva kapjuk:

$$I = \int \frac{a\cos t \cdot dt}{(a^2 - a^2\sin^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{tg} t + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C.$$

A $t = \arcsin\frac{x}{a}$ inverzfüggvénnyel visszahelyettesítve nyerjük végül:

$$I = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{x^2+1}}$. – Az $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

helyettesítéssel nyerjük:

$$I = \int \frac{\cos t\, dt}{\operatorname{tg}^4 t \cdot \cos^2 t} = \int \frac{\cos^3 \cdot dt}{\sin^4 t} = \int \frac{(1-\sin^2 t)\cos t\, dt}{\sin^4 t} =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + C = \frac{3\sin^2 t - 1}{3\sin^3 t} + C.$$

A $\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ visszahelyettesítéssel végül ez adódik:

$$I = \left(\frac{3x^2}{1+x^2} - 1\right)\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3x^3} + C = \frac{(2x^2-1)\cdot\sqrt{1+x^2}}{3x^2} + C.$$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} \cdot dx$. – Az $x = a \operatorname{tg} t$ helyettesítéssel élünk!

4. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

6. $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{r^2-x^2}}$

8. $\int_0^a y^2 \cdot \sqrt{a^2-y^2} \cdot dy$

9. $\int_0^4 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

ι | Lásd még a 2. §. b. β) cikket!

1. $\int x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cdot dx = \frac{1}{2}\int x(1-\cos x) \cdot dx = \frac{2}{4} - \frac{1}{2}\int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\cos x} \cdot dx =$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\,[x \cdot \sin x + \cos x] + C.$$

2. $\int x^2 \cdot \sin 2x \cdot dx$

3. $\int \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{e^{\varphi}}$

4. $\int e^{2t} \cdot \cos 3t \cdot dt$

5. $\int \frac{(x^2+1) \cdot dx}{e^x}$

6. $\int x^2\sqrt{1-\cos 4x} \cdot dx$

7. $\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\varphi}{2}} \cdot \sin 2\varphi \cdot d\varphi$

*8. $\int \cos (\ln x) \cdot dx$

*9. $\int x^n \cdot e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = x^n \, \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} \cdot e^{ax} -$

$$- \frac{n \cdot a}{a^2+b^2}\int x^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx + \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx.$$

Rekurzív formula! Itt $n = 1, 2, 3, \ldots$.

*10. $\int x^n \cdot e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx = x^n \, \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2+b^2} \, e^{ax} -$

$$- \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx - \frac{n \cdot a}{a^2+b^2}\int x^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx.$$

κ | 1. $\int \text{arc tg} \frac{x}{3} \, dx.$ – Az $u = \text{arc tg} \frac{x}{3}$, $v' = 1$ választással parciálisan integrálva, nyerjük:

$$I = x \text{ arc tg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2}\int \frac{2x \, dx}{x^2+9} = x \text{ arc tg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln C\,(x^2+9).$$

2. $\int x^3 \cdot \text{arc tg}\, x \cdot dx.$ – (L. hátul!)

Az alábbi rokontípusú integrálok különböző módszerek kombinálásával oldhatók meg! (L. hátul!)

*3. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x \, dx}{x^2}$. (L. hátul!)

*4. $\int \ln (1-\sqrt{x})\, dx$

*5. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}}{x^2}\, dx$

6. $\int \frac{\ln (\ln x)}{x}\, dx$

7. $\int \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{x}\, dx$

b) Exponenciális és hiperbolikus függvények integrálása

α) $\int R(e^x)\, dx$ Az integrálandó e^x racionális kifejezése. Ekkor az

$$u = e^x, \qquad x = \ln u, \qquad dx = \frac{du}{u}$$

helyettesítés $\int R(u) \frac{du}{u} = \int R_1(u)\, du$ alakra, vagyis u racionális kifejezésének integrálására vezet.

β) $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \operatorname{th} x)\, dx$ Minthogy

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ily módon érthető, hogy az előbbi $u = e^x$ helyettesítéssel e típus is racionalizálható.

γ) Trigonometrikus integrálok analogonjai

Az 5. §. *a.* alatt tárgyalt típusok mindegyikének van hiperbolikus analogonja. Ezeknél általában nem térünk rá az exponenciális alakra, hanem *a megfelelő trigonometrikus típusnál szokásos integrálási eljárást alkalmazzuk.* A trigonometrikus és hiperbolikus függvények és azonosságaik messzemenő analógiája, valamint a hiperbolikus függvények viszonylag ritkább szereplése szükségtelenné teszi az utóbbiak integrálásának részletes tanulmányozását. Ehelyett néhány fontos megjegyzést teszünk.

γ_1) **$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$.** – Mint már a 4. §. b. ε) alatt említettük, a

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2}, \qquad x = 2 \operatorname{ar\,th} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1-t^2},$$

$$\operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

helyettesítéssel racionalizáljuk az integrált.

γ_2) E mindig célravezető, de hosszadalmas eljárás helyett, az 5. §. *a.* ζ), valamint az 5. §. *a.* $\alpha-\varepsilon_0\eta-\lambda$) alatti típusok **hiperbolikus analogonjainál**, az ott ismertetett speciális eljárások hiperbolikus megfelelőit alkalmazzuk!

γ_3) Gyakran előnyös a következő **hiperbolikus azonosságok felhasználása:**

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1; \quad \operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad 1-\operatorname{th}^2 x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \operatorname{ch}^2 x=\frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2},$$

$$\operatorname{sh}^2 x=\frac{\operatorname{ch}^2 2x-1}{2}; \quad e^x=\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x; \quad \operatorname{ar\,sh} x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\operatorname{ar\,ch} x=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right), \quad \operatorname{ar\,tg} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

δ **Vegyes integrálok.** Ezekről nehéz általános megállapításokat tenni; ehelyett a példákra és feladatokra utalunk!

Példák és feladatok

α 1. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx.$ – Az $u=e^x$ helyettesítéssel:

$$I=\int\frac{u^2}{1+u^2}\cdot\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{2u\,du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\ln C(1+u^2)=\frac{1}{2}\ln C\cdot(1+e^{2x}).$$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{\frac{du}{u}}{u+\frac{1}{u}}.$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{2x}-2e^x}.$

4. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

5. $\displaystyle\int\frac{a\cdot e^\varphi+b}{a\cdot e^\varphi-b}\,d\varphi.$

6. $\displaystyle\int\frac{e^{2s}}{1+e^s}\,ds.$

β 1. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}{e^x}\cdot dx.$ – Áttérve exponenciális alakra:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})\,dx}{e^x}=\int dx=x+C.$$

2. $\displaystyle\int e^x\cdot\operatorname{ch}^2 x\cdot dx=\frac{1}{4}\int e^x(e^{2x}+2+e^{-2x})\cdot dx.$

3. $\displaystyle\int\frac{x+\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}\,dx$

4. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x+\operatorname{sh}^3 x}\,dx$

*5. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$; $x = a \operatorname{sh} t$ helyettesítés.

γ | 1. $\int \frac{(1+\operatorname{sh} x)\,dx}{\sin x\,(1+\operatorname{ch} x)}$. – A γ_1) esetnek megfelelően $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel élünk:

$$I = \int \frac{1+\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}\left(1+\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{1-t^2+2t}{t(1-t^2+1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-t+2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln t - \frac{t^2}{2} + 2t\right] + C = \frac{1}{2}\left[\ln \operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{th}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{th}\frac{x}{2}\right] + C.$$

2. $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)\cdot \operatorname{sh} x} = ?$ – Helyettesítés: $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

3. $\int \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx = ?$ – Az integrálandó előjelet vált, ha $\operatorname{sh} x$-et $-\operatorname{sh} x$-re cseréljük. A helyettesítés tehát $t = \operatorname{ch} t$, $dt = \operatorname{sh} t \cdot dt$. Ezzel:

$$I = \int \frac{(t^2-1)^2 \cdot dt}{t^4} = \int \frac{t^4-2t^2+1}{t^4} \cdot dt = t + \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \cos x + \frac{2}{\cos x} - \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} = ?$ – Az integrálandó nem vált előjelet, ha $\operatorname{sh} x$ és $\operatorname{ch} x$ egyaránt előjelet vált. Így a helyettesítés:

$$t = \operatorname{th} x,\; dt = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \text{amellyel nyerjük:}$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x} = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-t^2}.$$

5. $$\int \operatorname{ch}^3 \varphi \cdot d\varphi = \int (1+\operatorname{sh}^2\varphi)\cdot \operatorname{ch}\varphi = \int (1+u^2)\,du = u +$$

$$+ \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{sh}\varphi + \frac{\operatorname{sh}^3\varphi}{3} + C.$$

6. $\int \operatorname{sh}^4 \varphi \cdot d\varphi = ?$ – Az $I = \int \underset{u}{\operatorname{sh}^3 \varphi} \cdot \underset{v'}{\operatorname{sh} \varphi} \cdot d\varphi$ felfogásban parciálisan integráljuk!

7. $\int t \cdot \operatorname{ch} t \cdot dt = ?$ – Parciálisan integráljuk.

8. $\int \frac{dx}{(1-\operatorname{ch} x)^2}$. – A $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel!

9. $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch}^2 x)^2}$.

10. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1-\operatorname{th} x}\,dx$.

11. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

12. $\int \operatorname{th}^3 x\cdot dx$.

*13. $\int e^{2\operatorname{ar\,th} x}\cdot dx$. – Az $\operatorname{ar\,th} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ azonosság felhasználásával nyerjük:

$$I=\int e^{\ln\frac{1+x}{1-x}}\cdot dx=\int\frac{1+x}{1-x}\,dx=-\int\frac{(x+1-2)+2}{x-1}\,dx=$$

$$=-\int dx-2\int\frac{dx}{x-1}=-x+\ln\frac{C}{(x-1)^2}.$$

8 1. $\int e^{a\log x}\cdot dx=\int e^{\frac{\ln x}{\ln a}}\cdot dx=\int x^{\frac{1}{\ln a}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{\ln a}+1}}{\frac{1}{\ln a}+1}+C.$

2. $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}=\int\frac{e^x[(x+1)-1]}{(x+1)^2}\,dx.$

Eme átalakítás után nyilvánvaló, hogy az integrandus éppen $\frac{e^x}{1+x}$ deriváltja, és így:

$$I=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\cdot dx=\frac{e^x}{1+x}+C.$$

3. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx$. – Helyettesítés: $t=\sqrt{x}$.

4. $\int 10^x\cdot dx=\int e^{x\ln 10}\cdot dx$.

5. $\int\sqrt{e^t}\cdot dt$

6. $\int a^x\cdot e^x\cdot dx$

7. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\cdot dx$

8. $\int\frac{e^{2x}\,dx}{(e^x+1)^{1/4}}$

9. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$

10. $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$

11. $\int_0^{\pi}e^{\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi.$

Műszaki alkalmazások

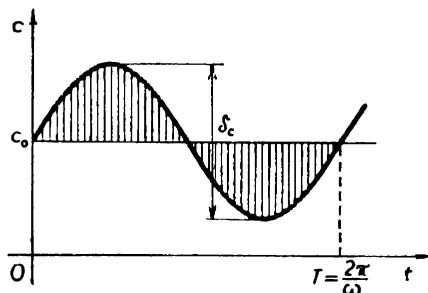
1. *Ingadozó sebességű folyadéktömeg lendületének megnagyobbodása.*[1]

Szorítkozzunk a *harmonikus* (sinusos) *sebességingadozás* esetére! Legyen c a pillanatnyi sebesség, c_0 a középsebesség, ω a lengés (ingadozás) szögsebessége, T egy lengés ideje (periódusa), továbbá

$$\delta = \frac{\delta_c}{c_0} = \frac{c_{max} - c_{min}}{c_0}$$ az ún. *egyenlőtlenségi fok.*

Ezzel a sebesség:

$$c(t) = c_0\left(1 + \frac{\delta}{2}\sin\omega t\right)$$



31. ábra

A *lendület viszonylagos megnagyobbodása* egy lengés (periódus) alatt:

$$\xi = \frac{\int_0^T c^2 \cdot dt}{c_0^2 \cdot T}, \quad \text{ahol} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

A számláló:

$$\int_0^T c^2(t)\cdot dt = c_0^2 \cdot \int_0^T \left(1 + \frac{\delta}{2}\sin\omega t\right)^2 \cdot dt = c_0^2 \cdot \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt + \delta \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\omega t \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta^2}{4}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega t \cdot dt\right] = c_0^2\left[\frac{2\pi}{\omega} + 0 + \frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{\pi}{\omega}\right] = c_0^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{\delta^2}{8}\right),$$

mert

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega t \cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1 - \cos 2\omega t)\, dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Ennélfogva a *folyadék lendülete* a sebességingadozás egy periódusa alatt

$$\xi = \frac{c_0^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}}{c_0^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \left(1 + \frac{\delta^2}{8}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{8}\text{-szeresére } \textit{nő!}$$

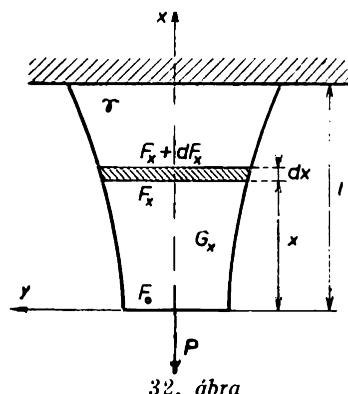
A megnagyobbodás láthatóan *az egyenlőtlenségi fok négyzetével* arányos.

[1] L. Pattantyús: Áramlástan.

2. *Egyenszilárdságú húzott rúd és deformációs munkája.*[2]

Állapítsuk meg először a *forgástest alakú húzott rúd* meridián görbéjét, azon követelmény alapján, hogy *minden keresztmetszetében ugyanakkora σ húzófeszültség* keletkezzék.

Az x abszcisszájú keresztmetszet terhelése:



32. *ábra*

$$\sigma F_x = P + G_x = Q_x$$

Az $x + dx$ absz. keresztmetszeté pedig:

$$\sigma(F_x + dF_x) = P + G_x + F_x \cdot dx = Q_{x+dx}$$

A különbség:

$$\sigma dFx = Fx \cdot dx \cdot \gamma$$

Ebből

$$\int_{F_0}^{Fx} \frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma}{\sigma} \int_0^x dx,$$

ahonnan

$$\ln \frac{F_x}{F_0} = \frac{\gamma}{\sigma} x, \quad \text{illetve} \quad F_x = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}, \quad \frac{y^2 \pi}{4} = \frac{y_0^2 \pi}{4} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x},$$

és végül:

$$y = y_0 e^{\frac{\gamma}{2\sigma} x}$$

a meridiángörbe egyenlete. Hasonló jellegű az egyszilárdságú nyomott rúd számítása. (Gondoljunk az *Eiffel*-toronyra!)

A *deformációs munka* lesz: $L = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma F_x \cdot d\lambda_x,$

ahol

$$\lambda_x = \frac{Px}{EF_0} = \frac{\sigma}{E} x, \qquad d\lambda_x = \frac{P}{EF_0} dx = \frac{\sigma}{E} dx.$$

A rúd térfogata:

$$V = \pi \int_0^l y^2 \cdot dx = \int_0^l F_x \cdot dx = F_0 \int_0^l e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \cdot dx = \frac{F_0 \sigma}{\gamma} \left(e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} - 1 \right).$$

Ezzel:

$$L = \frac{\sigma}{2} F_0 \frac{P}{EF_0} \int_0^l e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \cdot dx = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot F_0 \int_0^l e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \cdot dx = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

a keresett deformációs munka. Megjegyzendő, hogy

$$\lambda_x = \frac{Q_x x}{EF_x} = \frac{Q_0 x}{EF_0} = \frac{Px}{EF_0} = \frac{\sigma x}{E}.$$

[2] L. Hermann: Gépelemek.

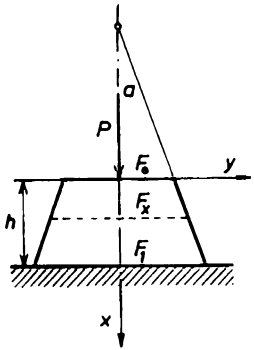
3. *Nyomott csonkakúp deformációs munkája.*[1]

Igazoljuk hasonló módon, hogy (a G önsúly elhanyagolása esetén):

$$L=\frac{P^2\cdot h}{2E\cdot\sqrt{F_0F_1}}\,.$$

[Bocsássuk előre, hogy $F_x=F_0\left(\frac{a+x}{a}\right)^2$, $\lambda_x=\frac{Px}{EF_x}$ és

$$L=\frac{P}{2}\int_0^h d\lambda_x.\Big]$$



33. ábra

4. *Váltakozó áram teljesítménye, φ fázisszög esetén.*[2]

Legyen u a pillanatnyi feszültség, i a pillanatnyi áramerősség, ω a körfrekvencia. $T=\frac{2\pi}{\omega}$ a periódus; L a pillanatnyi, L_T az egy periódus alatti átlagos, közepes teljesítmény,

A feszültség és áramerősség: $u=u_0\cdot\cos\omega t$ és $i=i_0\cdot\cos(\omega t-\varphi)$, ahol u_0 és i_0 az amplitúdók (maximumok), φ pedig (az induktív és kapacitív terhelésből származó) fáziseltolódási szög.

A pillanatnyi teljesítmény: $L=u\cdot i$, míg az *egy periódus alatti átlagteljesítmény:*

$$L_T=\frac{1}{T}\int_0^T u\cdot i\cdot dt=\frac{\omega}{2\pi}u_0i_0\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega t\cdot\cos(\omega t-\varphi)\,dt=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}u_0i_0\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}[\cos(2\omega t-\varphi)+\cos\varphi]\cdot dt=$$

$$=\frac{\omega}{4\pi}u_0i_0\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t-\varphi)+t\cdot\cos\varphi\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=$$

$$=\frac{\omega}{4\pi}u_0i_0\left[\frac{1}{2\omega}\sin(4\pi-\varphi)-\frac{1}{2\omega}\sin(-\varphi)+\frac{2\pi}{\omega}\cos\varphi+0\right]=$$

$$=\frac{u_0i_0}{2}\cdot\cos\varphi=\frac{u_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi=U\cdot I\cos\varphi,$$

ahol $U=\frac{u_0}{\sqrt{2}}$ és $I=\frac{i_0}{\sqrt{2}}$ az ún. *effektív feszültség és áramerősség.*

Az integrálást az 5. § a. η) szerint végeztük!

[1] L. Wittenbauer: Aufgabensammlung zur technischen Mechanik.

[2] L. Gombás: Elektrodinamika.

5. *Egyenesvonalú mozgás, a sebességgel arányos ellenállás esetén.*[1]

Legyen x, v, a az út, sebesség, gyorsulás; 0-indexszel jelöljük a kezdeti ($t=0$) értéket; legyen $x_0=0$. – *A mozgás törvénye:*

$$a=-k\cdot v,$$

vagy más alakban:

$$\frac{dv}{dt}=-k\cdot v.$$

Szétválasztva és integrálva:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-k\cdot\int_0^t dt,\qquad \ln\frac{v}{v_0}=-k\cdot t\qquad \text{és}\qquad v=v_0e^{-kt}.$$

Minthogy $v=\dfrac{dx}{dt}=v_0e^{-kt}$, azaz $dx=v_0e^{-kt}\,dt$, újra integrálva nyerjük végül:

$$\int_0^x dx=v_0\int_0^t e^{-kt}\cdot dt,\qquad x=-\frac{v_0}{k}\,[e^{-kt}]_0^t=\frac{v_0}{k}\,(1-e^{-kt}).$$

Ily módon előállítottuk *a sebességet és elmozdulást az idő függvényében.*

6. *Görbe rúd egy pontjának elmozdulása terhelés alatt.*[2]

A szilárdságtanban ezt (negyed-körív alakú rúd esetén) a következő két integrállal számítjuk:

függőleges elmozdulás:

$$\eta=\frac{Pr}{FE}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi-\frac{Pr^3}{EI}\int\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

vízszintes elmozdulás:

$$\xi=\left(\frac{Pr^3}{EI}-\frac{2Pr}{FE}\right)\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\cdot d\varphi,$$

ahol P a terhelő erő, r a körív sugara, E a rugalmassági modulus, F a rúd keresztmetszete I ennek inercianyomatéka. Igazoljuk, hogy *az eredmény:*

$$\eta=\frac{Pr^3\pi}{4IE},\qquad \xi=\frac{1}{2}\left(\frac{Pr^3}{EI}-\frac{2Pr}{FE}\right).$$

[1] L. Muttnyánszky: Kinetika.
[2] L. Herrmann: Gépelemek.

EREDMÉNYTÁR

Első rész
A HATÁROZATLAN INTEGRÁLOKRÓL ÁLTALÁBAN

1. §. A határozatlan integrál fogalma, sajátságai. Alapintegrálok. Egyszerűbb integrálási szabályok

a)

$\beta-\varepsilon$ | 7. $y=F(x)+C=\cos x+C$; $y_1=F(x)+C_1=\cos x+1$, $y_2=\cos x-\frac{\pi}{4}$.

8. $y=x^2+C$, $y_1=x^2-2$, $y_2=x^2$.

9. $y=\operatorname{arc\,tg} t+C$, $y_1=\operatorname{arc\,tg} t+\frac{\pi}{4}$.

10. $y=\operatorname{tg} u+C$.

11. $y=\ln v+C=\ln kv$.

12. $y=e^x+C$.

13. $y=\ln\sin x+C=\ln k\sin x$.

14. $y=\arcsin x+C$.

16. $y=x^2+C$, $y_1=x^2$, $y_2=x^2+2$, $y_3=x^2-2$. L. az 1. ábrát!

17. $y=e^x+C$, $y_1=e^x$, $y_2=e^x+2$. L. a 2. ábrát!

18. $y=\ln Cx$, $y_1=\ln x$, $y_2=\ln 3x$. L. a 3. ábrát!

19. $y=\frac{1}{x}+C$, $y_1=\frac{1}{x}$, $y_2=\frac{1}{x}-3$. Ábrázoljuk!

20. $y=\operatorname{arc\,tg} x+C$, $y_1=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{\pi}{4}$, $y_2=\operatorname{arc\,tg} x-\pi$. Ábrázoljuk!

21. $y=\cos 2x+C$, $y_1=\cos 2x$, $y_2=\cos 2x-2$. Ábrázoljuk!

22. $y=\operatorname{ch} u+C$.

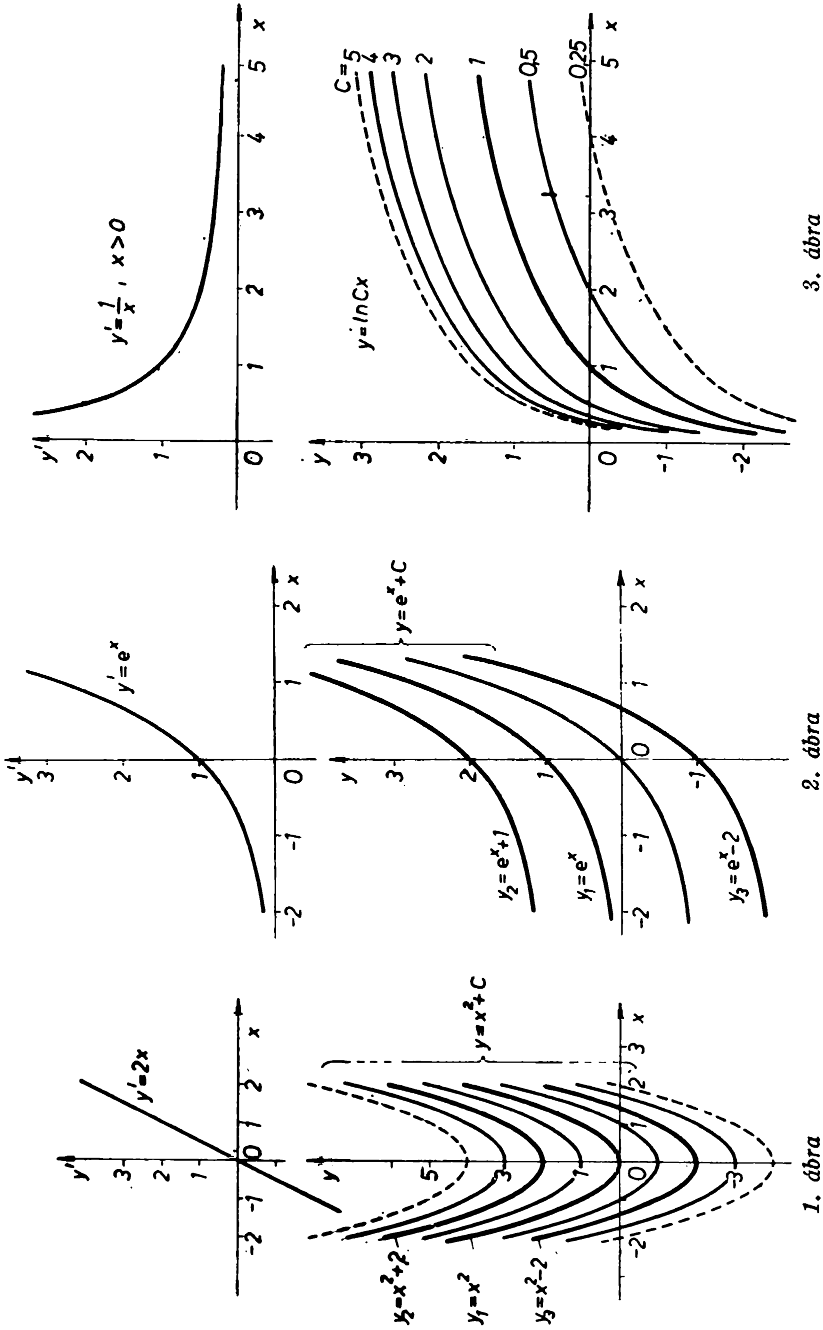
23. $y=\operatorname{ar\,th} v+C$.

27. $y_1=\ln x$, $y_2=\ln x+2=\ln e^2x$, $y_3=\ln x-2=\ln e^{-2}x$. L. a 4. ábrát!

28. $y_1=-\operatorname{ch} x$, $y_2=-\operatorname{ch} x+4$, $y_3=-\operatorname{ch} x-1$. L. az 5. ábrát!

29. $y_1=\operatorname{th} x$, $y_2=\operatorname{th} x+1$, $y_3=\operatorname{th} x-3$. L. a 6. ábrát!

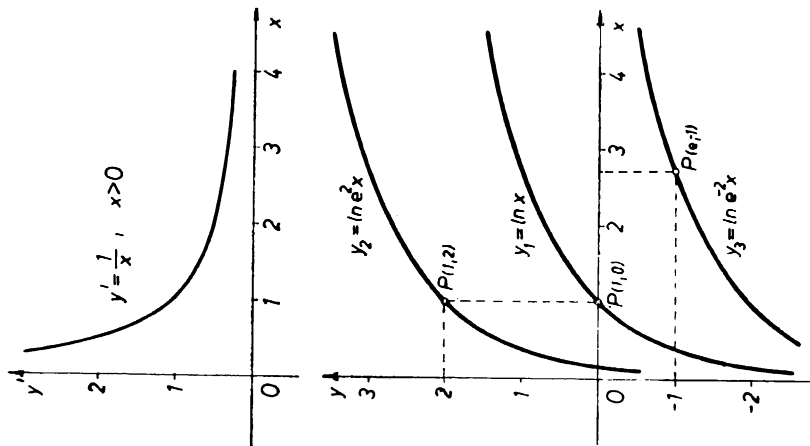
30. $y_1=\cos\frac{x}{2}+1$, $y_2=\cos\frac{x}{2}$, $y_3=\cos\frac{x}{2}+4$. Ábrázoljuk!



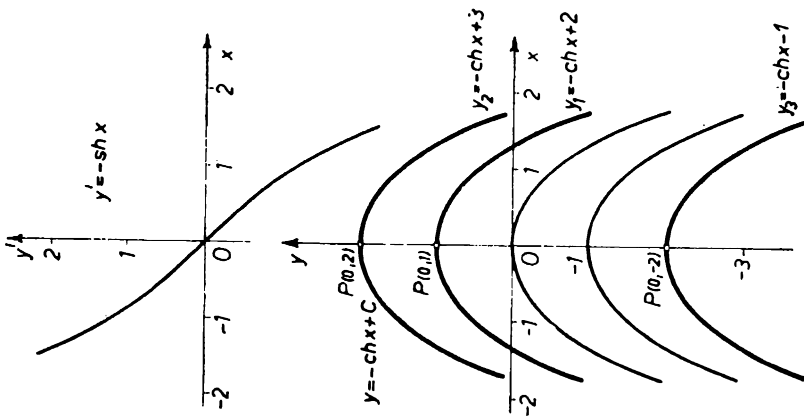
1. ábra

2. ábra

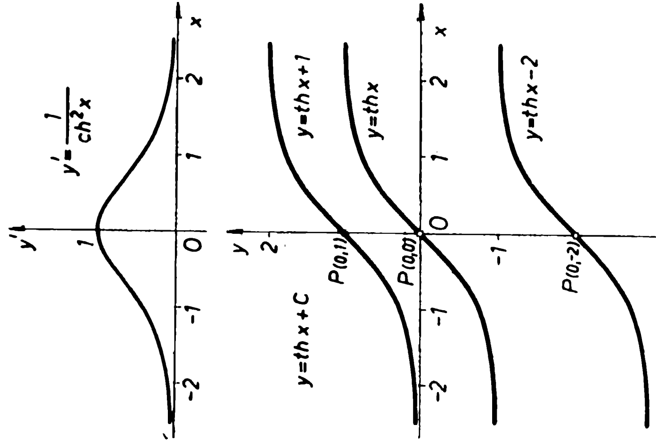
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

31. $y_1 = \sin t - \cos t + 1, \quad y_2 = \sin t - \cos t - 3.$ Ábrázoljuk!

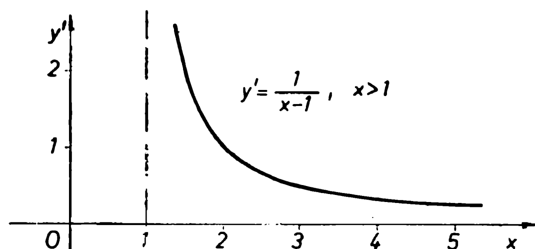
34. $y = \ln(x-1) + C = \ln k(x-1).$ L. a 7. ábrát!

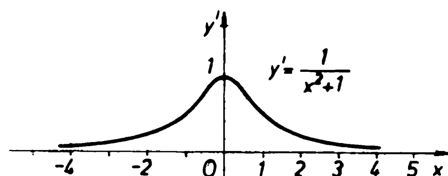
35. $y = \operatorname{arc\,tg} x + C.$ L. a 8. ábrát! 36. $y = \ln C \sin x.$

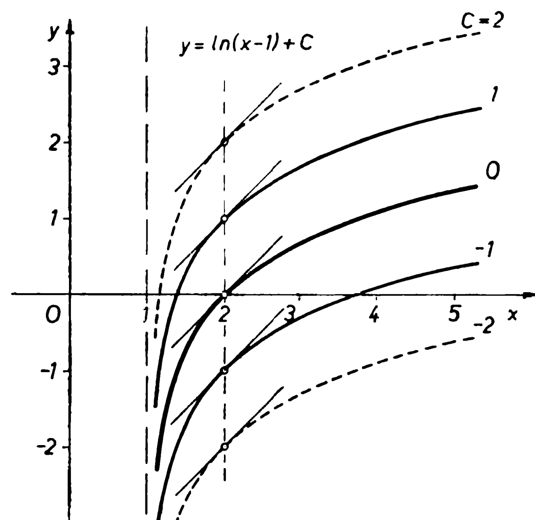
37. $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$, $\ln y = -\ln x + \ln C$ és végül $xy = C$, egyenlőszárú hiperbolasereg L. a 9. ábrát! 38. $b^2x^2 - a^2y^2 = C$, hiperbolasereg.

39. $x^2 + y^2 = C^2$, körsereg. L. a 10. ábrát!

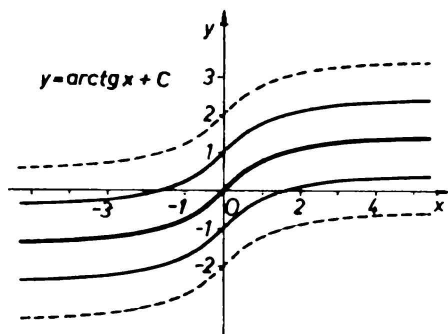
40. $\dfrac{1}{3}y^3 = \dfrac{1}{2}x^2 + C$, szemikubikus parabolasereg.







7. ábra



8. ábra

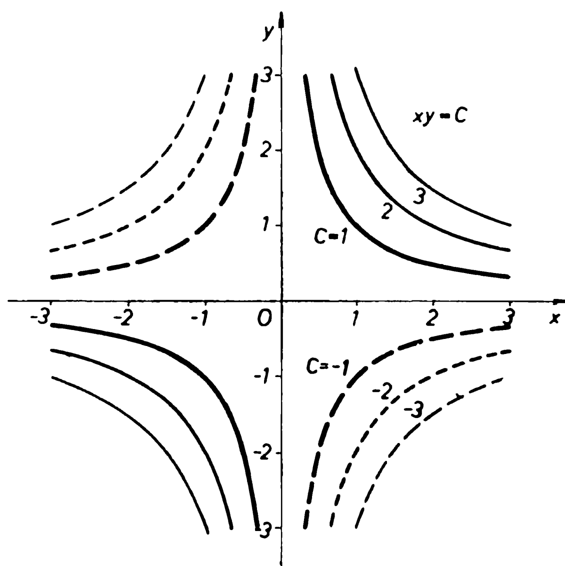
41. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = C^2$, azaz $(x+1)^2 + (y-1)^2 = C^2 + (\sqrt{2})^2$, $P(-1, 1)$ középpontú körsereg. L. a 11. ábrát!

46. $y = x^2 - 8.$ L. a 12. ábrát! 47. $y_0 = x^2 + x + 5, \quad y_0(3) = 17.$

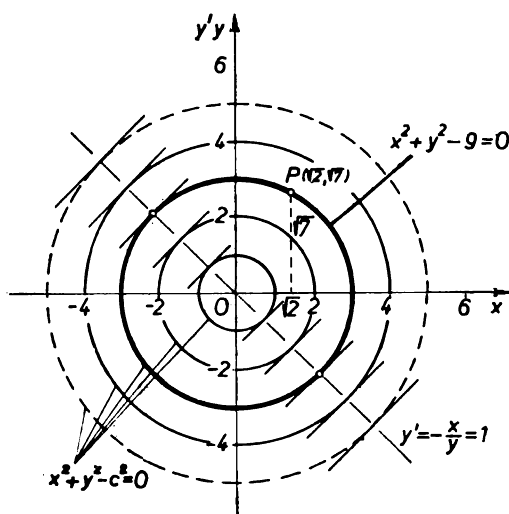
48. $y_0 = 2e^{-\frac{x^2}{2}}.$ L. a 13. ábrát! 49. $x^2 + y_0^2 - 2hx - 2ky = 0$, azaz $(x-h)^2 + (y_0 - k)^2 = h^2 + k^2$; $P(h, k)$ középpontú és $R = \sqrt{h^2 + k^2}$ sugarú kör. L. a 14. ábrát! 50. $y_0 = -2 \operatorname{ctg} 2x + 1.$

51. $(y_0 + 1)^2 - (x-1)^2 = 3$ egyenlőszárú (eltolt) hiperbola.

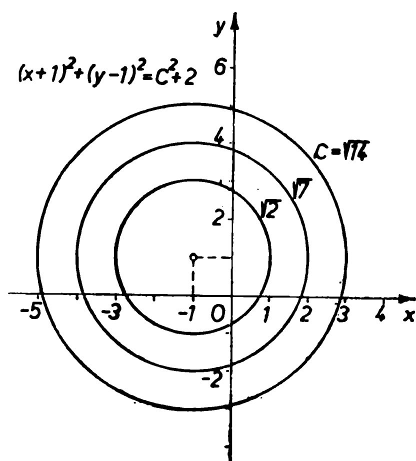
52. $x \ln y_0 = x - 1.$ 53. $y_0 = \dfrac{2}{3} x \sqrt{2px}, \quad y_0(2p) = \dfrac{8p^2}{3}.$



9. ábra



10. ábra



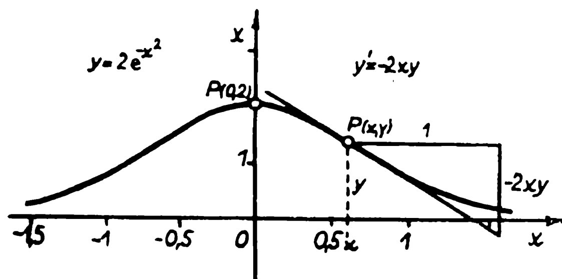
11. ábra

54. $y' = \frac{1}{x} + C_1, \quad y'(1) = \frac{1}{1} + C_1 = \text{tg}\, 135° = -1, \quad C_1 = -2; \quad y = \ln x - 2x + C_2,$
$y_0(1) = 0 - 2 + C_2 = 0, \quad C_2 = 2, \quad$ tehát $\quad y_0 = \ln x - 2x + 2.$ Ábrázoljuk!

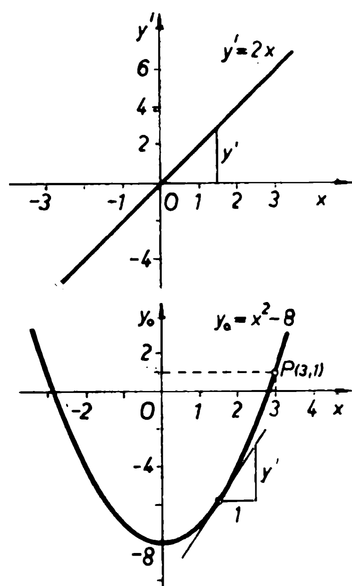
55. $xy_0 + 6x = 6.$

57. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2a}, \quad \int_1^{y_0} \frac{dy_0}{y_0} = \frac{1}{2a}\int_0^x dx, \quad \ln y_0 - 0 = \frac{x}{2a}, \quad y_0 = e^{\frac{x}{2a}}.$

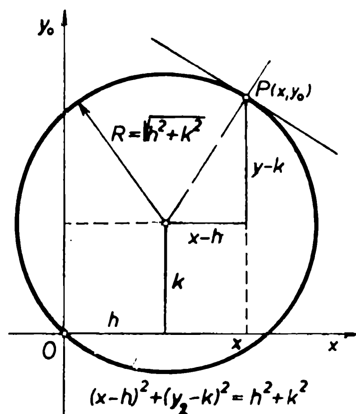
58. $-\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}, \quad \int_1^{y_0} y_0\, dy_0 = \int_0^x x\, dx, \quad y_0^2 - x^2 = 1$ hiperbola. L. a 15. ábrát!



13. ábra



12. ábra



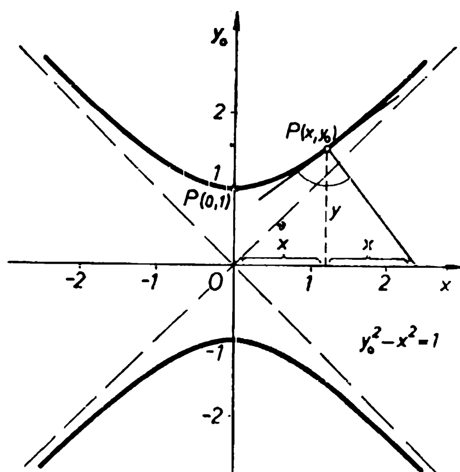
14. ábra

59. $y\sqrt{1 + y'^2} = R, \quad dx = \pm \frac{y\, dy}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad x^2 + y^2 = R^2$ kör (L. a 16. ábrát.)

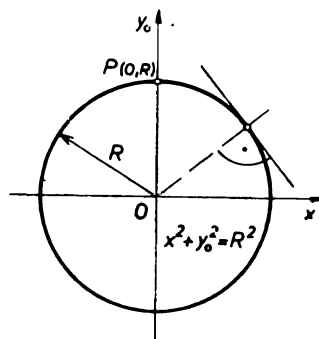
63. $T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad T(0, \pi) = 0.$ L. a 17. ábrát!

64. $T(1, 2) = \frac{1}{2}.$ L. a 18. ábrát!

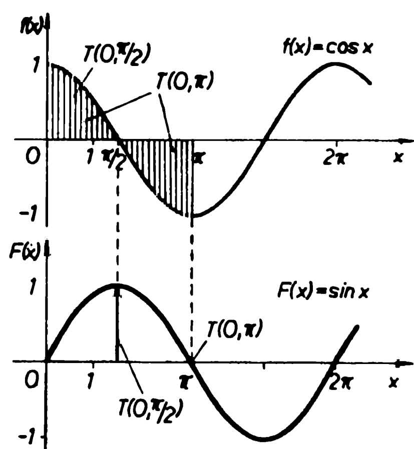
65. $F(x) + C = \int \frac{dx}{x} = \left\langle \begin{matrix} \ln x + C, & \text{ha} & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & \text{ha} & x < 0 \end{matrix} \right\}.$ [L. b. α_1)] Tehát $T\left(\frac{1}{2}, 1\right) =$
$= [\ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} = 0 - \ln \frac{1}{2} = -(\ln 1 - \ln 2) = +\ln 2, \quad \left(\text{itt} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad \text{azaz} \quad x > 0\right);$



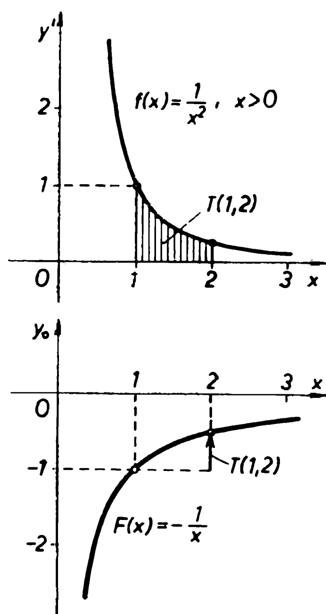
15. ábra



16. ábra



17. ábra

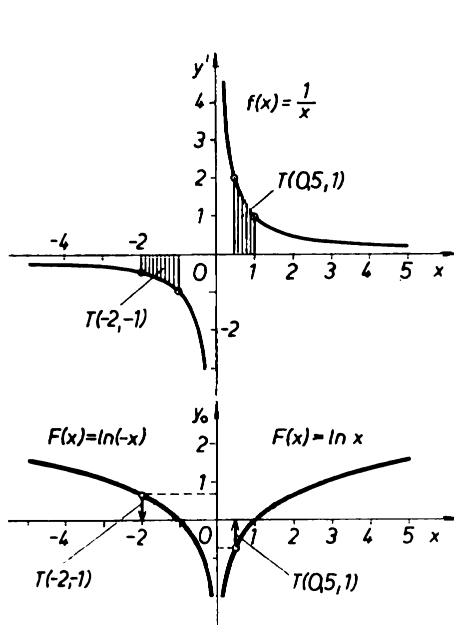


18. ábra

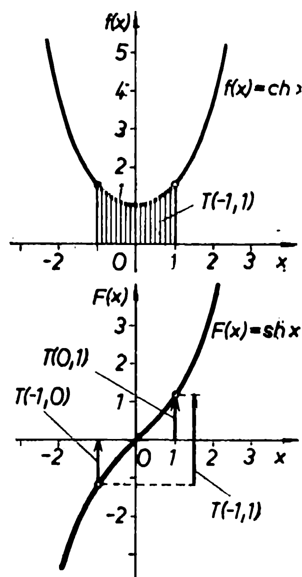
továbbá $T(-2,\ -1)=[\ln(-x)]_{-2}^{-1}=0-\ln 2=-\ln 2$, (itt $-2\leq x\leq -1$, azaz $x<0$). L. a 19. ábrát!

66. $T(-1,\ 1)=e-\frac{1}{e}\cong 2{,}35$. L. a 20. ábrát!

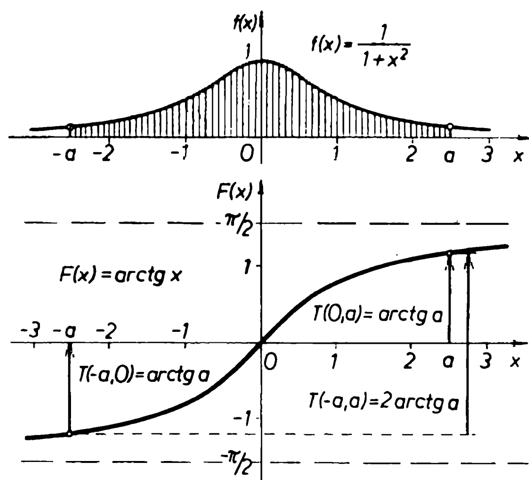
67. $T(0,\ 1)=\frac{\pi}{4}$, $T(-a,\ a)=2\operatorname{arc\,tg} a$, $T(-\infty,\ +\infty)=2\lim\limits_{a\to\infty}\operatorname{arc\,tg} a=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$.
L. a 21. ábrát!



19. *ábra*



20. *ábra*



21. *ábra*

68. $T\left(0, \frac{1}{2}\right)=\ln \sqrt{3}\cong 0{,}55.$ L. a 22. ábrát!

69. $T\left(0, \frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$ Ábrát!

70. $T(0{,}2\pi)=4.$ Ábrát!

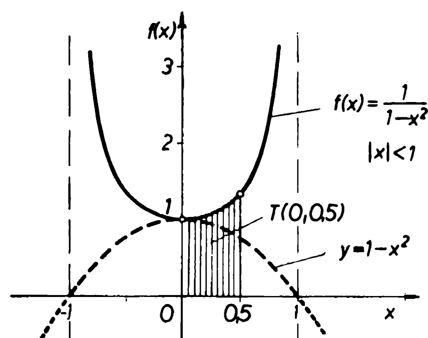
71. $T(0{,}5)=10\left[2\sqrt{x+4}\,\right]_0^5=20.$

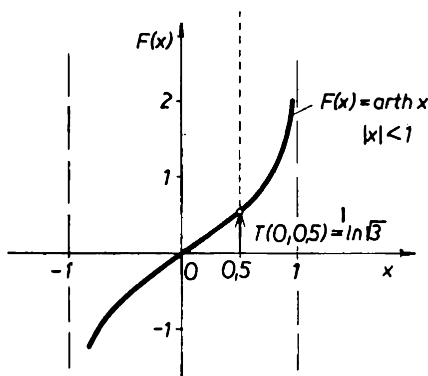
72. $\frac{1}{x}=\frac{5}{2}-x,\quad x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=2,$ köztük $g(x)\geqq f(x)$; $T\left(\frac{1}{2}, 2\right)=\int\limits_{1/2}^{2}\left(\frac{5}{2}-x\right)dx-\int\limits_{1/2}^{2}\frac{dx}{x}=\frac{15}{8}-2\ln 2\cong 0{,}49.$ L. a 23. ábrát!

73. $T=\frac{9}{2}.$ Ábrát!

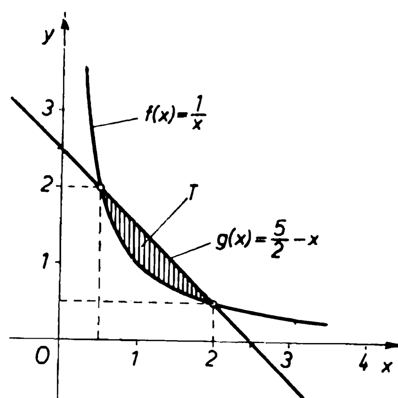
74. $T=\frac{1}{3}.$ L. a 24. ábrát!

75. A $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en $g(x)\leqq f(x)$, $T_1=-T_2\cong 0{,}214.$ L. a 25. ábrát!

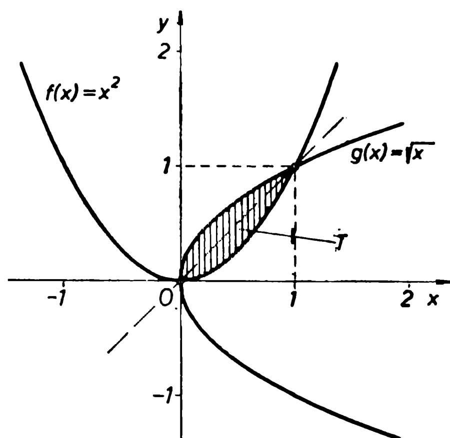




22. ábra



23. ábra



24. ábra

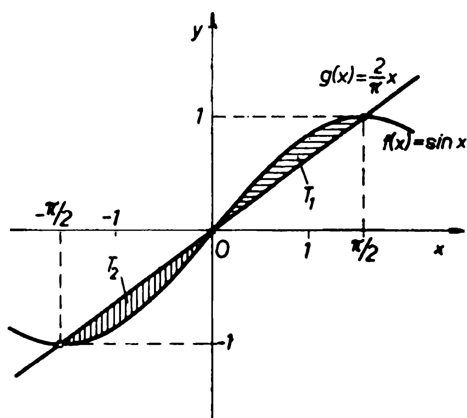
76. $T_1 \cong -3{,}4,\quad g(x) \leqq f(x);\quad T_2 = T_3 \cong +0{,}07,\quad g(x) \geqq f(x).$ L. a 26. ábrát!

77. $T_1 = -T_2 = 4.$ Ábrázolni! 78. $T_1 \cong -5{,}08,\quad g(x) \leqq f(x);\quad T_2 = T_3 \cong$ $= +1{,}46,\quad g(x) \geqq f(x).$ Ábrázolni!

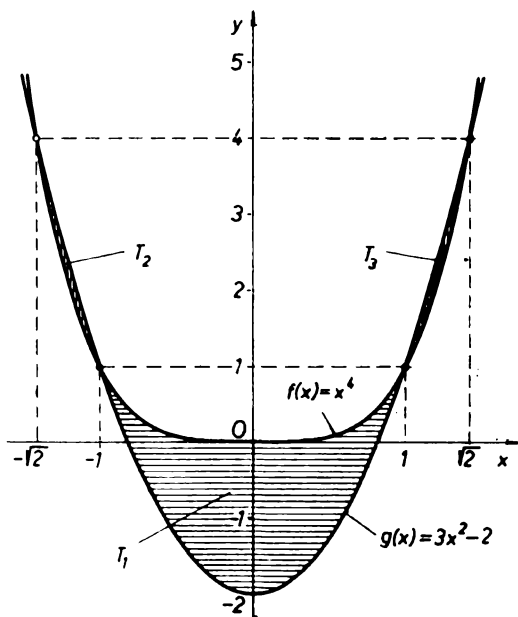
82. $I = 1.$ 83. $I = 0.$ 84. $I = \frac{1}{2}.$ 85. $I = \frac{10\sqrt{5}}{3}.$ 86. $I = e^2 - 1.$

87. $I = \operatorname{sh} a.$ 88. $I = \frac{1}{3}(1 - \operatorname{ch} 6).$ 89. $I = 1.$ 90. $I = \frac{\pi}{6}.$

91. $I = \left[\ln \sin x\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$



25. ábra



26. ábra

b)

α | α₁) 4. $I = \frac{x^6}{6} + C.$ 5. $I = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$

6. $I = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$ 7. $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C.$

8. $I = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C.$ 9. $I = \frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9} + C.$ 10. $I = -\frac{7\sqrt[7]{x^4}}{4} + C.$

11. $I = \int \frac{x^2\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{7/2}\,dx = \frac{2x^4\sqrt{x}}{9} + C.$

13. $I=-\frac{19}{3}$. Ellentétes előjelű, mint $\int_2^3 x^2\,dx$.

14. $I=0$. Az $f(x)=x^3$ páratlan függvény. 15. $I=1$.

16. Itt $-e\leq x\leq -1$, vagyis $x<0$. Ezért $I=[\ln(-x)]_{-e}^{-1}=\ln 1-\ln e=-1$, a 4. alapintegrálnak megfelelően! (Készítsünk ábrát a két utolsó példához, területszámításra gondolva!)

α_2) 19. $I=\int \frac{1+x+1-x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.

20. $I=\int \frac{1}{1+x}\cdot e^{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot dx=\int \frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}=$
$=\arcsin x+C$; $x^2<1$.

21. $I=[\operatorname{ar\,ch} x]_2^3=\ln\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_2^3=\ln\frac{3+\sqrt{8}}{2+\sqrt{3}}$.

22. $I=[\operatorname{ar\,sh} x]_0^1=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

23. $I=[\operatorname{arc\,tg} x]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$.

α_3) 27. $I=\int \cos x\,dx=\sin x+C$. 28. $I=\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$.

29. $I=\left[\frac{10^x}{\ln 10}\right]_0^1\cong 0{,}4343\cdot 9$. 30. $I=\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$.

31. $I=[-\operatorname{ctg} x]_{\pi/4}^{\pi/2}=1$. 32. $\int_1^3 1\,dx=2$.

β

36. $I=b\sin x+C$. 37. $I=-a\cos x+b\sin x+C$.

38. $I=ae^x+\frac{b}{n+1}x^{n+1}+C$. 39. $I=\frac{1}{a^2}\operatorname{tg} x+C$.

40. $I=\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$. 41. $I=-\frac{3{,}7}{1{,}17}x^{-1{,}17}+C$.

42. Négyzetre emelés! $I=x-x\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$.

43. $I=4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}}+C$. 44. $I=a^2x+\frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3}-$
$-\frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3}-\frac{x^3}{3}+C$. 45. $I=\frac{x^3}{3}-6x+5\ln x+C$.

46. Szorzás! $I=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$. 47. $I=-10x^{-0{,}2}+15x^{-0{,}2}-3{,}62x^{1{,}38}+C$.

48. $I=\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+C.$

49. Osztás! $I=-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln x+C.$

50. Osztás! $I=\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

51. Osztás! $I=\int(x-\sqrt{2})\,dx=\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}+C.$

52. Osztás! $I=\int(x+3)\,dx=\frac{x^2}{2}+3x+C.$

53. Szorzás! $I_1=\int e^{x\ln a}\cdot e^x\,dx=\int e^{x(1+\ln a)}\,dx=\frac{a^xe^x}{1+\ln a}+C_1,$

$I_2=5\int a^0\,dx=5x+C.$

54. Osztás! $3x-\frac{2}{\ln\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^x+C.$

55. Átalakítás! $\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}.$ Így $I=x-\operatorname{arc\,tg}x+C.$

56. Átalakítás: $\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}.$

Tehát $I=-\frac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg}x+C.$

57. Az $1+\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ azonosság felhasználásával: $I=\int\left(-1+\frac{1}{\cos^2x}\right)dx=-x+\operatorname{tg}x+C.$

58. $I=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}\,dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$

59. Az $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^x}{2}$ értelmében: $I=\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+C.$

60. $I=\int\frac{1+\cos^2x}{2\cos^2x}\,dx=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C.$

61. $I=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}\,dx=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$

62. $I=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x-\sin x}\,dx=\int(\cos x+\sin x)\,dx=\sin x-\cos x+C.$

63. Lévén $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, ezért $I=\frac{\pi}{2}x-\cos x+C.$

64. $I=\frac{53}{6}.$

65. $I=\frac{9}{32}.$

66. $I=\frac{52}{5}.$

67. $I=\int\frac{a^4}{4}.$

68. $I=\frac{a^2}{6}.$

69. $I=1-\frac{\pi}{4}.$

Második rész

A HATÁROZATLAN INTEGRÁLÁS ALAPMÓDSZEREI

2. §. Helyettesítés

a)

5. $I=\frac{1}{5}\operatorname{ch}(5x-7)+C.$

6. $I=\frac{1}{4}\ln(4x-3)+C_1=$

$=\frac{1}{4}\ln\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\ln 4+\frac{1}{4}\ln C_2=\frac{1}{4}\ln C_3\left(x-\frac{3}{4}\right).$

7. $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ar\,sh}\frac{x}{2}+C.$

8. $I=\frac{1}{5}\operatorname{ar\,ch}\frac{2x}{5}+C.$

9. $I=\int\frac{1}{7}e^{7x+1}+C.$

10. $I=\int\frac{(x-2)\,dx}{(x-2)(x-3)}=\ln C(x-3).$

11. $I=\frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}+C.$

12. $I=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C.$

13. $I=\frac{(ax+b)^{1-n}}{a(1-n)}+C.$

14. $I=-\frac{5}{33}(8-3x)^{11/5}+C.$

15. $I=-\frac{a^{-x}}{\ln a}+C.$

16. $I=\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C.$

17. $I=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^{x}+x+C.$

18. $I=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax}{b}+C.$

19. $I=\frac{1}{a}\operatorname{ar\,sh}\frac{ax}{b}+C.$

20. $I=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C.$

21. $I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}+C.$

22. $I=\frac{1}{2a}\ln C\frac{x-a}{x+a}.$

23. $I=\frac{1}{a-b}\ln C\frac{x+b}{x+a}.$

24. $I=\int\left(\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\,\frac{1}{cx+b}\right)dx=$

$=\frac{a}{c}x+\frac{bc-ad}{c^2}\ln k(cx+b).$

25. $I=\frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\sin 2ax+C.$

26. $I=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\ln C\frac{x-3}{x-2}$.

27. $I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=$ $=\frac{1}{8}\ln C\frac{2x-1}{2x+3}$.

28. $I=\frac{\pi}{12}$.

29. $I=\frac{\pi}{6}$.

30. $I=\sqrt{3}-1$.

31. $I=-5(\sqrt[5]{16}-1)$.

32. $I=\frac{7}{72}$.

33. $I=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

β

5. $I=\frac{1}{2b}\ln(a+bt^2)$.

6. $I=\ln C(x^2+3x)$.

7. $I=\frac{1}{2}\ln C(y^4+4y)$.

8. $I=\frac{1}{3b}\ln C(a+be^{3\varphi})$.

9. $I=\ln C(1-\cos x)$.

10. $I=\ln C(\sin^2 x+\pi)$.

11. $I=\ln C\left(\sin^2\frac{x}{2}-1\right)$.

12. $I=-\frac{1}{3}\ln k\cos 3x=\ln\frac{k}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$

13. $I=\ln C(\sin x+\cos x)$.

14. $I=\frac{c}{2b}\ln k(a+bx^2)$.

18. $I=\frac{1}{2}\ln C(4\cos^2 x+25\sin^2 x)$.

19. $I=\ln k\operatorname{tg} x$.

20. $I=\ln 2$.

γ

γ_1) 3. $I=\frac{1}{4}\sin x+C$.

4. $I=\frac{1}{3}(\operatorname{arc\,tg} x)^3+C$.

5. $I=\frac{1}{4}(x^2+1)+C$.

6. $I=\frac{1}{5}(e^x-1)^5+C$.

7. $I=\int\frac{\operatorname{tg}^7 x}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x+C$.

8. $I=\frac{1}{6}$.

9. $I=\frac{1}{5}$.

12. $I=2\int\cos^4 x\sin x=-\frac{2}{5}\cos^5 x+C$.

13. $I=\int\sin^5 x\cos x\,dx=\frac{1}{6}\sin^6 x+C$.

γ_2) 16. $I=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$.

17. $I=\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$.

18. $I=\frac{4}{5}\sqrt[4]{\sin^5 x}+C$.

19. $I=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x}+C$.

20. $I=\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C$.

21. $I=\frac{2}{3}[(\operatorname{arc\,tg} x)^{3/2}]_0^1=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2}$

22. $I=\frac{2}{3}[\sin^{3/2} x]_0^{\pi/2}=\frac{2}{3}$.

23. $I=\frac{5}{6}$.

24. $I=\int(\ln\sin x)^{1/2}\cdot d(\ln\sin x)=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln\sin x)^3}+C$.

γ_3) 27. $I=\frac{1}{\cos x}+C=\sec x+C.$ 28. $I=-\frac{1}{10(e^x+\pi)^{10}}+C.$

29. $I=-\frac{1}{4\ln^4 x}+C.$ 30. $I=-\frac{1}{3(\operatorname{ar\,th} x)^3}+C.$

31. $I=-\frac{1}{5\ln\sin x)^5}+C.$ 32. $I=-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C.$

33. $I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right]_{\pi/4}^{\pi/6}=\frac{1}{2}[\operatorname{ctg}^2 x]_{\pi/4}^{\pi/6}=\frac{1}{2}[3-1]=1.$

34. $I=\int\frac{d(\sin^2 x)}{(\sin^2 x)^2}=-\frac{1}{\sin^2 x}+C=-\operatorname{cosec}^2 x+C.$ 35. $I=-\frac{1}{2(1+x^2)^2}+C.$

γ_4) 37. $I=-\frac{3}{10}\sqrt[3]{(6-5x^2)^2}+C.$ 38. $I=[2\sqrt{a^2+x^2}]_0^a=2a(\sqrt{2}-1).$

39. $I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x}+C.$ 40. $I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin^2 x+1)^3}+C.$

41. $I=\frac{7}{6}\sqrt[7]{(1-\cos x)^6}+C.$ 42. $I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+C.$

43. $I=\frac{10}{9}\sqrt[10]{\ln^9\sin x}+C.$ 44. $I=2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+C.$

45. $I=\frac{5}{4}\sqrt[5]{(e^x-1)^4}+C.$ 46. $I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\operatorname{sh} x+e)^2}+C.$

47. $I=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$ 48. $I=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

49. $I=2\sqrt{1+x^2}+3\operatorname{ar\,sh} x+C.$ 50. $I=\frac{1}{9}\left[2\sqrt{9x^2-4}-\frac{1}{3}\operatorname{ar\,ch}\frac{3x}{2}\right]+C.$

γ_5) 52. $I=-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+C.$ 53. $I=-4\cdot\sqrt[4]{\cos x}+C.$

54. $I=3\cdot\sqrt[3]{\sin x}+C.$ 55. $I=\frac{2}{5}\ln^2 x\cdot\sqrt{\ln x}+C.$

56. $I=\frac{10}{7}\sqrt[10]{\ln\sin x}+C.$ 57. $I=3\sqrt{\operatorname{tg} x}+C.$

δ 2. $I=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$

3. $I=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$ 4. $I=\operatorname{sh} x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+C.$

5. $I=\frac{1}{5}\operatorname{ch}^5 x-\frac{2}{3}\operatorname{ch}^3 x+\operatorname{ch} x+C.$

6. $I=\int(2\cos^2 x)^{3/2}\cdot dx-2\sqrt{2}\int\cos^3 x\,dx=2\sqrt{2}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)+C.$

7. $I=\int (2\,\mathrm{sh}^2 x)^{5/2}\cdot dx=4\sqrt{2}\int \mathrm{sh}^5 x\,dx=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{5}\,\mathrm{ch}\,x^5-\frac{2}{3}\,\mathrm{ch}^3 x+\mathrm{ch}\,x\right)+C.$

8. $I=\ln\sin x-\frac{1}{3}\ln^3\sin x+C.$

10. $I=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C.$ 11. $I=\frac{1}{3}\,\mathrm{sh}^3 x+\frac{1}{5}\,\mathrm{sh}^5 x+C.$

12. $I=2\sqrt{2}\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx=2\sqrt{2}\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)=$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x\right)+C.$

13. $I=2\sqrt{2}\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^3 x\,dx=2\sqrt{2}\int (1+\mathrm{sh}^2 x)\,\mathrm{sh}^2 x\,d(\mathrm{sh}\,x)=$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{sh}^3 x+\frac{1}{5}\,\mathrm{sh}^5 x\right)+C.$

14. $I=\frac{1}{5}\ln^5 x-\frac{1}{7}\ln x+C.$

ε | 3. $u=x^5+1,\quad f(u)=\sin u;\quad I=-\cos(x^5+1)+C.$

4. $u=x^2,\quad f(u)=\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,u;\quad I=-\frac{1}{2}\ln k\cos x^2.$

5. $u=-x^3,\quad f(u)=-\frac{1}{3}e^u;\quad I=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C.$

6. $u=e^x,\quad f(u)=\sin u;\quad I=-\cos e^x+C.$

7. $u=x^2,\quad f(u)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2+1};\quad I=\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x^2+C.$

8. $u=x^3,\quad f(u)=\frac{1}{3}\,\frac{1}{u^2+4};\quad I=\frac{1}{6}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x^3}{2}+C.$

9. $u=x^4,\quad f(u)=\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{u^2-1}};\quad I=\frac{1}{4}\,\mathrm{ar\,ch}\,x^4+C.$

10. $u=e^x,\quad f(u)=\frac{1}{u^2+4};\quad I=\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{e^x}{2}+C.$

11. $u=2^x,\quad f(u)=\frac{1}{\ln 2}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}};\quad I=\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C.$

12. $u=\sin x,\quad f(u)=\frac{1}{a^2+u^2};\quad I=\frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sin x}{a}+C.$

13. $u=\sqrt{x},\quad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}},\quad f(u)=\frac{2}{1+u^2};\quad I=2\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x}+C.$

14. $u=\sqrt{x};\quad I=2\sin\sqrt{x}+C.$ 15. $u=\sin x;\quad I=\mathrm{arc\,tg}\,(\sin x)+C.$

16. $u=3\cos^2 u, \quad du=-3\sin 2x\,dx; \quad I=-\frac{1}{3}e^{3\cos 2x}+C.$

17. $u=\cos x, \quad f(u)=-\frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}}; \quad I=-2\cos^{\frac{1}{2}} x+\frac{4}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x-\frac{2}{9}\cos^{\frac{9}{2}} x+C.$

18. $u=\cos x, \quad f(u)=-\frac{(1-u^2)^3}{u^{10}};$

$$I=-\frac{1}{9\cos^9 x}+\frac{3}{7\cos^7 x}-\frac{3}{5\cos^5 x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C.$$

19. $u=\sqrt{x}; \quad I=\int\frac{\sqrt{x}\cdot dx}{2\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}=2\int\frac{u\,du}{1-2u}=-\int\frac{(1-2u)-1}{1-2u}\,du,$

$$I=-\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{x})+C.$$

20. $I=\int\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{sh} 2(\ln\sin x)\,dx; \quad f(u)=\operatorname{sh} 2u; \quad I=\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2u+C=\frac{1}{2}\operatorname{ch}(\ln\sin^2 x)+C.$

21. $u=\operatorname{tg} x; \quad I=\int_0^1 e^u\cdot du=e-1.$

22. $u=\sqrt{x}; \quad I=2\int_0^2 e^u\,du=2(e^2-1).$

23. $u=\operatorname{tg} x; \quad I=\int\frac{u^3\,du}{u^2+1}=\int\left(u-\frac{1}{2}\,\frac{2u}{u^2+1}\right)du, \quad I=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\frac{k}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=$

$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln k\cos x.$

24. Hasonlóan!

25. $u=\operatorname{tg} x; \quad I=\int\frac{du}{a^2u^2+b^2}, \quad I=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)+C.$

ζ)

1. $I=\frac{1}{2}\ln\sin(2x+1)+C.$

2. $I=\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x^2+4)^4}+C.$

3. $I=\frac{5}{8}\sqrt[15]{(x^3+21)^{16}}+C.$

4. $I=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C.$

5. $I=\sqrt{3x^2-5x+6}+C.$

6. $I=\frac{1}{4(x^2-3x+8)^4}+C.$

7. $I=\frac{(\ln x)^{m+1}}{m+1}+C.$

8. $I=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

9. $I=x-4\ln(x+4)+C.$

10. $I=\frac{A}{b}\left[x-\frac{a}{b}\ln(bx+a)\right]+C.$

11. $I=x+\ln(1+x^2)+C.$

12. $I=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln(2x-1)+C.$

13. $I=x-2\operatorname{arc\,tg} x+C.$

14. $I=C-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-$
$-\ln(1-x)+C.$

15. $I = x - \sin x + C.$

16. 19 $I = -\frac{1}{8(2x-3)^4} + C.$

16. $I = -\frac{1}{3}\sqrt{(8-2x)^3} + C.$

17. $I = \frac{3m}{b}\sqrt[3]{a+bx} + C.$

18. $I = -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C.$

20. $I = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$

21. $I = -\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

22. $I = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C.$

23. $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 \cdot \operatorname{ar\,sh} x + C.$

24. $I = \frac{1}{5}\arcsin 5x + C.$

25. $I = \arcsin\frac{x}{2} + C.$

26. $I = \frac{\pi}{3}\operatorname{arc\,tg} 3x + C.$

27. $I = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + C.$

28. $I = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2) + C.$

29. $I = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$

30. $I = \frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C.$

31. $I = \ln\frac{x-1}{x} + C.$

32. $I = \ln\frac{2x-3}{x+1} + C.$

33. $I = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$

34. $I = \frac{1}{3}\ln\frac{x-5}{x-2} + C.$

35. $I = \frac{1}{2}\arcsin(2x+3) + C.$

36. $I = \operatorname{ar\,sh}\frac{x-1}{2} + C.$

37. $I = \int\frac{-1-\cos x+2}{1+\cos x}\,dx = \int\left(-1+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx = -x + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

38. $u = \sin x, \quad I = \int\frac{(1-u^2)}{u^4}\,du, \quad I = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$

39. $u = \cos x, \quad I = -\int\frac{(1-u^2)}{\sqrt{u}}\,du; \quad I = -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C.$

40. $I = \int\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx, \quad I = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$

41. $I = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)^2 dx;$ lásd az előző példát; $I = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg} x + x + C.$

42. $I = \int x e^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x^2} + C.$

43. $I = \int \operatorname{ch} 2a\,x\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} 2ax + C.$

44. $I = \int\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)dx = x - \operatorname{th} x + C.$

45. $I = \int\frac{e^x\,dx}{e^x} = x + C.$

b)

α 4. $x = \text{sh}\, u$ helyettesítés; az 1.-hez hasonló lépések; $I = \frac{1}{2}(\text{ar sh}\, x + x\sqrt{x^2+1})$.

5. $x = a \sin u$; lásd a 2. példát; $I = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$.

6. $x = a\, \text{ch}\, u$; $I = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$.

7. $x = a\, \text{tg}\, u$, $I = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{a^3}(u + \sin u \cos u) + C = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} +$

$+\frac{1}{2a^3} \text{arc tg} \frac{x}{a} + C$, mert $u = \text{arc tg} \frac{x}{a}$ és $\sin u \cos u = \frac{\text{tg}\, u}{\sqrt{1+\text{tg}^2 u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 u}} =$

$$= \frac{\frac{x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{ax}{a^2+x^2}.$$

8. $x = a \sin u$; $I = \frac{1}{a}\int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{a} \ln \text{tg} \frac{u}{2} + C = \frac{1}{a} \ln \frac{a - \sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$,

$$\text{mert } \text{tg} \frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\sin u} = \left(\frac{2\sin^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} \right) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}} = \frac{a - \sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

9. $x = a \sin u$; $I = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$.

10. $x = \text{tg}\, u$, vagy $x = \text{sh}\, u$; $I = \frac{1}{2}\left(\text{arc tg}\, x - \frac{x}{x^2+1}\right) + C$.

Az $I = \int \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] dx$ felfogásban, a 7. példa eredményét felhasználva is eljárhatunk!

11. $x = \frac{a}{\cos u}$, $\sqrt{x^2-a^2} = a\, \text{tg}\, u$; $I = \sqrt{x^2-a^2} + a \arcsin \frac{a}{x} + C$;
az $x = a\, \text{ch}\, u$ helyettesítés is célravezető!

12. $I = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \text{ar sh} \frac{x}{a} + C$. 13. $I = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$.

14. $I = -\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5} + C$.

β 3. $I=\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$ 4. $I=\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.$

5. $I=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$ 6. $I=\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$

γ 3. $u=u^{12}$, $I=\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

4. $I=\frac{6}{5}\left[\sqrt{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln(\sqrt{x^5}-1)\right]+C.$

5. $I=2(\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})+C.$ 6. $I=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C.$

7. $I=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt{x}+6\ln(\sqrt{x}-1)+C.$

8. $x+1=u^2$, $I=2\left[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})\right]+C.$

9. $I=4-2\ln 3.$

δ 4. $x+1=u^2$; $I=\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+C.$

5. $x-1=u^2$; $I=\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C.$

6. $x-1=u^3$; $I=3\sqrt[3]{x}+3\ln(\sqrt[3]{x}-1)+C.$

7. $x^3=a^3\sin^2 u$; $I=-\frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x^3)+C.$

8. $e^x+1=u^4$; $I=\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt{(e^x+1)^3}+C.$

9. $x+1=u^2$; $I=x+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C.$

ε 1. $I=-\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

2. $I=-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{|a|}+C$; $x=a\cos 2u.$

3. $I=\frac{2x-1}{4}\sqrt{x(1-x)}+\frac{1}{4}\arcsin\sqrt{x}+C.$

4. $I=-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}+C$; $a>0.$

5. $I=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C;\quad x-a=(b-a)\sin^2 u.$

6. $I=\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$

7. $I=-\sqrt{(x-a)(b-x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$

8. $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln C(x+\sqrt{a^2+x^2}).$

9. $x=a\operatorname{ch}2u;\quad I=\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln C(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}),$ ha $x>a;$

$I=-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln C(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}),$ ha $x<a.$

10. $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 u;\quad I=2\ln C(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}),$ ha $x+a>0$ és $x+b>0;\quad I=-2\ln C(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}),$ ha $x+a<0$ és $x+b<0.$

11. $I=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln C(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}),$ ha $x+a\geqq 0$ és $x+b\geqq 0.$

3. §. Parciális integrálás

a)

α 3. $I = x \sin x + \cos x + C.$ 4. $I = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C.$

5. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);\quad I = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

6. $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x;\quad I = \frac{x}{2}\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{4}\operatorname{ch} 2x + C.$

β 3. $I = \frac{1}{5}\left[(5x-1)\arcsin(5x-1) + \sqrt{1-(5x-1)^2}\right] + C.$

4. $I = x(\ln x - 1) + C.$ 5. $I = x \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$

6. Az 1. példa eredményét felhasználva: $I = \frac{1}{3}\left[(3x+1)\operatorname{arc\,tg}(3x+1) - \right.$
$\left. - \frac{1}{2}\ln C[1+(3x+1)^2]\right].$

7. $I = \frac{1}{3}\left[3x \operatorname{ar\,th} 3x + \frac{1}{2}\ln C(1-9x^2)\right].$

8. $I = -\frac{1}{5}[(2-5x)\operatorname{ar\,sh}(2-5x) - \sqrt{1+(2-5x)^2}] + C.$

9. A 4. példa szerint: $I = \frac{2}{7}(7x-3)[\ln(7x-3) - 1] + C.$

10. $I = \int \ln(2x+5)\,dx - \int \ln(3-x)\,dx = \frac{1}{2}(2x+5)\cdot[\ln(2x+5) - 1] +$
$+ (3-x)[\ln(3-x) - 1] + C.$

11. $I = \int \operatorname{ar\,sh} x\,dx = x \operatorname{ar\,sh} x - \sqrt{1+x^2} + C.$

12. $I = \int \operatorname{ar\,th} x\,dx = x \operatorname{ar\,th} x + \frac{1}{2}\ln C(1-x^2).$

13. $I = \int \ln z\,dz = \ln x\,[\ln \ln x - 1] + C.$

14. $I=x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arc\,tg}x+C.$

15. $I=x\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{x}+\ln C(x^2+4).$

γ 4. $I=-\frac{1}{2x^2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+C=-\frac{1}{2x^2}\ln x\sqrt{e}+C.$

5. $I=-\frac{1}{3x^3}\ln x\sqrt[3]{e}+C.$ 6. $I=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$

7. $I=\frac{x^3}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3\,dx}{x+1}=\frac{x^3+1}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C.$

8. $I=\frac{x^2-1}{2}\operatorname{ar\,th}x+\frac{x}{2}+C.$

9. $I=\int x\operatorname{ar\,sh}x\,dx=\frac{2x^2+1}{4}\operatorname{ar\,sh}x-\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2}+C.$

10. $I=\frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln C(x^2+1).$

11. $I=\frac{1}{8}\left(x^8\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x-\operatorname{arc\,tg}x\right)+C.$

12. $I=-\frac{1}{x}\arcsin x+\ln C\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}}$, mely utóbbi tag más alakban:

$\ln\operatorname{tg}\frac{\arcsin x}{2}+C.$

13. $I=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C.$

14. $I=-\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C.$

15. $I=\frac{2}{3}x^{3/2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{4}{3}x^{1/2}+\frac{4}{3}\int\frac{dz}{z^4+1},\quad z=x^{1/2}.$

16. $I=\frac{3}{2}\int\sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}x\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x\sqrt{x}}\,dx=\frac{(x^2+1)}{\sqrt{x}}\operatorname{arc\,tg}x-2\sqrt{x}+C.$

δ 4. $u=x^2,\quad v'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\quad I=x^2\cdot\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C.$

5. $u=x,\quad v'=\frac{1}{\sqrt{1+2x}};\quad I=x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C.$

6. $u=\arcsin x,\quad v'=\frac{1}{\sqrt{1+x}};\quad \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}};\quad I=2\sqrt{1+x}\cdot\arcsin x+$ $+4\sqrt{1-x}+C.$ 7. L. a 3. példát! $I=x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+C.$

8. Előbb $z = \arcsin x$ helyettesítéssel, majd $u = z$, $v' = \frac{1}{\cos^2 z}$ választással parciálisan $I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln (1 - x^2) + C.$

9. Előbb $u = (\arcsin x)^2$, $v' = 1$ választással, majd a 3. példabeli módon parciális integrálás. $I = x (\arcsin x)^2 + 2(\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - x) + C.$

10. Fogás: $I = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx - \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$; $I = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C.$ A $z = \operatorname{arc\,tg} x$ helyettesítéssel, majd parciálisan is eljárhatunk! L. a 12. példát!

11. $I = \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x + \int \operatorname{tg}^2 x \, dx$; $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$; $I = \operatorname{tg} x (\ln \cos x + 1) - x + C.$

12. $I = -\frac{1}{x} \operatorname{arc\,tg} x + \ln C \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^2.$

b)

α | 4. $I = \frac{1}{k^3} [(k^2x^2 - 2) \sin kx + 2kx \cos kx] + C.$

5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; $I = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \sin 2x + \frac{x}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + C.$

6. $I = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$

7. $I = -e^{-x}(2 + 2x + x^2) + C.$

8. $I = e^{2x}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\right) + C.$

9. $I = \int x^2 e^{x \ln a} dx = a^x \left(\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a}\right) + C.$

10. $I = x^2 \operatorname{ch} x - 2(x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) + C.$

11. $I = \frac{1}{k^3} [(k^2x^2 + 2) \operatorname{sh} kx - 2kx \operatorname{ch} kx] + C.$ L. a 4. példát!

12. $I = \int x^2 e^{3x} dx.$ L. az 1. példát! 13. $I = \int x^3 e^{2x} dx.$ L. a 8. példát!

14. $I = \int x^2 \operatorname{ch} 2x \, dx.$ L a 11. példát, ha $k = 2.$

15. L. a 3. példát! $I = -e^{-x}[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \ldots + n!] + C.$

16. $I = e^{ax}\left[\frac{P_n(x)}{a} - \frac{P_n'(x)}{a^2} + \frac{P_n''(x)}{a^3} - + \ldots\right] + C.$

17. $I = \sin bx \left[\frac{P_n'(x)}{b^2} - \frac{P_n'''(x)}{b^4} + - \ldots\right] - \cos bx \left[\frac{P_n(x)}{b} - \frac{P_n''(x)}{b^3} + - \ldots\right] + C.$

18. $I=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)+C.$

19. $I=\int z^2 \operatorname{sh} z\,dz=z^2 \operatorname{ch} z-2(z \operatorname{sh} z-\operatorname{ch} z)+C,$ ahol $z=x^2.$

20. $I=-\sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin x)^2+2(x \arcsin x+\sqrt{1-x^2})+C.$

21. $I=-3\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos\sqrt[3]{x}+6(\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}+\cos\sqrt[3]{x})+C.$

β

3. $I_{0,2}=x\ln^2 x-2\int \ln x\,dx=x\ln^2 x-2(x\ln x-x)+C=$
$=x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C.$

4. $I_{0,n}=x[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x-+\ldots+(-1)^n\cdot n!].$

5. $I_{0,2}=\frac{ax+b}{a}[\ln^2(ax+b)-2\ln(ax+b)+2]+C.$

6. $I_{-2,3}=-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C.$

γ

3. $I=-\frac{1}{6}\sin^5 x\cdot\cos x-\frac{5}{24}\sin^3 x\cdot\cos x-\frac{5}{16}\sin x\cdot\cos x+\frac{5}{16}x+C.$

4. $I=\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x-\frac{1}{24}\sin^3 x\cos x-\frac{1}{16}\sin x\cos x+\frac{1}{16}x+C.$

5. A $\operatorname{Ch}_n=\frac{1}{n}\operatorname{ch}^{n-1}x\operatorname{sh}x-\frac{n-1}{n}\operatorname{Ch}_{n-2}$ rekurzív képlettel dolgozunk.

6. Az $\operatorname{Sh}_n=\frac{1}{n}\operatorname{sh}^{n-1}x\operatorname{ch}x-\frac{n-1}{n}\operatorname{Sh}_{n-2}$ rekurzív képlettel dolgozunk.

7. $I=\int\cos^4 x\,dx.$ — L. a 2. példát!

8. $I=\int\cos x\,dx.$ — Mint előbb!

9. $I=\int\sin^6 x\,dx.$ — L. a 3. példát!

10. $I=\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{4}\sin^3(3x-5)\cdot\cos(3x-5)+$
$+\frac{3}{8}\cos(3x-5)\sin(3x-5)+\frac{3}{8}(3x-5)\Big]+C.$

11. $I=-\frac{1}{5}\Big[-\frac{1}{4}\sin^3(3-5x)\cos(3-5x)+\frac{3}{8}(3-5x)-$
$-\sin(3-5x)\cos(3-5x)\Big]+C.$

δ

3. $I=\frac{1}{2}\int e^{-x}(e^{2x}+e^{-2x})\,dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{6}e^{-3x}+C.$

4. $I=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C.$

5. $I=\frac{e^{5x}}{41}(4\sin 4x+5\cos 4x)+C.$

6. $I=-\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x+3\cos 3x)+C.$

7. $I=\frac{1}{2}\int e^{-x}(e^x-e^{-x})\,dx=\frac{x}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}+C.$ 8. $I=\frac{1}{10}e^{5x}-\frac{1}{2}e^{-x}+C.$

9. $I=\frac{1}{2}\int (e^x+e^{-x})\cos 5x\,dx=\frac{1}{52}[e^x(5\sin 5x+\cos 5x)+e^{-x}(5\sin 5x-\cos 5x)]+$
$+C=\frac{1}{26}\operatorname{sh} x\cos 5x+\frac{5}{26}\operatorname{ch} x\sin 5x+C.$ Megoldható az eredeti alakból kiinduló kétlépéses rekurzióval is!

10. $I=\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x-5\cos 2x)+C.$

11. $I=\frac{1}{2}\int e^x(1-\cos 2x)\,dx=\frac{e^x}{2}\left(1-\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}\right)+C.$

12. $I=\frac{e^{3u}}{10}(\sin u+3\cos u)+C=\frac{e^{3\arcsin x}}{10}\cdot(x+3\sqrt{1-x^2})+C.$

13. $I=\frac{e^u}{2}(\sin u-\cos u)+C=\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$

14. $I=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$

15. $I=Re\left[\frac{e^{(2+3i)x}}{2+3i}\right]+C=Re\left[\frac{2-3i}{2^2+3^2}e^{2x}(\cos 3x+i\sin 3x)\right]+C=$
$=\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$

ε | 2. $I=\frac{e^x}{2}[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x]+C.$

3. $I=\frac{e^x}{2}[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]+C.$

4. $$I=Re\left[\frac{x^2}{1+i}e^{(1+i)x}-\frac{2}{1+i}\int xe^{(1+i)x}\cdot dx\right]=Re\left[\frac{x^2}{1+i}e^{(1+i)x}-\right.$$
$$\left.-\frac{2x}{(1+i)^2}e^{(1+i)x}+\frac{2}{(1+i)^3}e^{(1+i)x}\right]+C=Re\left\{e^{(1+i)x}\left[\frac{1-i}{2}x^2-\frac{2(1-i)^2}{2^2}x+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2(1-i)^3}{2^3}\right]\right\}+C=Re\left\{\frac{e^x}{4}(\cos x+i\sin x)[2(1-i)x^2-2(1-i)^2x+(1-i)^3]\right\}+$$
$$+C=Re\left\{\frac{e^x}{4}(\cos x+i\sin x)[(2x^2-2x+2x+1-3)+i(-2x^2+4x-3+1)]\right\}+$$
$$+C=\frac{e^x}{2}[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]+C.$$

ζ | 3. $I=\frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2}+\frac{3}{648}\frac{x}{x^2+9}+\frac{3}{1944}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C.$

4. $I=\frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+2)^2}+\frac{3}{32}\frac{x}{x^2+2}+\frac{3}{32\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

5. $I=\frac{1}{24}\frac{x}{(x^2+4)^3}+\frac{3}{384}\frac{x}{(x^2+4)^2}+\frac{5}{1024}\frac{x}{x^2+4}+\frac{5}{2048}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C.$

6. $I=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}=\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$

7. $I=\int\frac{dx}{[(4x-3)^2+2^2]^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\frac{4x-3}{16x^2-24x+13}+\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-3}{2}\right]+C.$

8. $I=\int\frac{dx}{[(2x-3)^2+1]^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\frac{2x-3}{(4x^2-12x+10)^2}+\frac{3}{8}\frac{2x-3}{4x^2-12x+10}+\right.$

$\left.+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}(2x-3)\right]+C.$

9. $I=\frac{1}{18}\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{54}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}-9\left[\frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2}+\frac{3}{648}\frac{x}{x^2+9}+\frac{3}{1944}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right]+C.$

η) 1. $I=(x+a)\ln(x+a)-x+C.$

2. $I=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C.$

3. $I=e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C.$

4. $I=\operatorname{arc\,tg}[\ln(\operatorname{arc\,tg}x)-1]+C.$

5. $I=\ln C\frac{x}{1+x}-\frac{\ln x}{1+x}.$

6. $I=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{9}-x-x^2\right)\sin 3x-\frac{1}{9}(1+2x)\cos 3x+C.$

7. $I=\frac{1}{6}(x^6+1)\operatorname{arc\,tg}x=\frac{1}{6}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x\right)+C;\quad u(x)=\operatorname{arc\,tg}x.$

8. $I=x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C.$

9. $I=\frac{e^x}{5}(\cos^2 x+2\sin x\cos x+2)+C.$

10. $I=\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln C(x+\sqrt{1+x^2}).$

11. $I=-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C.$

12. $I=\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C.$

13. $I=\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2-x\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\ln C(1+x^2).$

14. $I=-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)+\frac{x^3}{3}\ln C\frac{1-x}{1+x}.$

15. $I=\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln C(x+\sqrt{a^2+x^2}).$

16. $I=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$

17. $I=2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}+C.$

18. $I=-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$

19. $I=\frac{(1+x)\,e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$

20. $I=-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x+C.$

21. $I=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh} 3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch} 3x+C.$

22. $I=x\ln C(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}.$

23. $I=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$

24. $I=\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C; \quad a\neq 0.$

Harmadik rész

RACIONÁLIS INTEGRÁLOK

4. §. Racionális függvények integrálása

b)

α, β, γ

4. $I=x^3-5x+\frac{x^5}{5}-x+C.$

5. $\Phi(x)=F(x)+C=3x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}+C;$

$\Phi_0(6)=-200=18+18-360+C_0,\quad C_0=124;\quad \Phi_0(x)=3x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^2}{3}+124.$

6. $I=\int (x^2+2x+1)\,dx=\frac{x^3}{3}+x^2+x+C.$

7. $I=\ln C\sqrt[4]{x-2}.$

8. $I=-\frac{3}{5}\ln C(7-5x).$

9. $\Phi_0(t)=\ln(2t-t^2).$

10. $I=\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\ln C(2x+5).$

11. $I=-\frac{1}{3(x-5)^3}+C.$

12. $I=-\frac{3}{28(7x-4)^4}+C.$

13. $I=\frac{1}{3}\int\frac{3x-1+1}{(3x-1)^2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{3x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(3x-1)^2}=\frac{1}{9}\ln C(3x-1)-\frac{1}{9(3x-1)}.$

14. $I=-\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)^3}+C.$

15. $I=\frac{3}{16(7-4x)^4}-\frac{21}{20(7-4x)}+C.$

16. $y\,dy=-x\,dx,\quad x^2+y^2=C^2,\quad C_0=5.$

δ

3. $I=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C.$

6 $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{4t+1}{2\sqrt{2}}.$

5. $I=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+3}{\sqrt{2}}+C.$

7. $I=\frac{\pi}{4a}.$

7. $I=\ln C\sqrt{\frac{3x-4}{3x+3}}.$

8. $I=-\frac{1}{12}\ln 5\cong -0{,}134.$

9. $I=\frac{1}{6}$.

10. $I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln C\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}$.

11. $I=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2+C$.

12. $I=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2-6u+5}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{(u-3)^2-4}=-\frac{1}{6}\operatorname{arc\,th}\frac{x^3-3}{2}+C$.

ε

6. $I=\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln C(x^2+1)$.

7. $I=-\frac{1}{3}\ln C(9x^2-1)+\frac{1}{6}\ln C\frac{3x-1}{3x+1}$.

8. $I=\frac{1}{3}\ln C(3x^2-2)-\frac{\sqrt{6}}{4}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

9. $I=\ln C(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}$.

10. $I=-\frac{1}{8}\ln C(4x^2-4x-3)+\frac{1}{16}\ln\frac{2x-3}{2x+1}$.

11. $I=\ln C(4x^2-4x+9)+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{2\sqrt{2}}$.

12. $I=\frac{1}{3}\ln C(3x^2+4x-7)-\frac{13}{30}\ln\frac{3x-3}{3x+7}$.

13. $I=-\frac{1}{2}\ln C(2-6x-x^2)+\frac{3}{2\sqrt{11}}\ln\frac{x+3-\sqrt{11}}{x+3+\sqrt{11}}$.

14. $I=-\frac{1}{6}\ln C(1-6x-9x^2)+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln C\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}$.

19. $I=\frac{1}{3}\ln C\frac{(x-5)^5}{(x-2)^2}$.

21. $I=\frac{1}{5}\ln C[(x-2)^2\cdot\sqrt{2x+1}]$.

20. $I=\ln C\frac{(x-4)^2}{x-3}$.

22. $I=\ln\frac{C}{2x^2-3x+1}$.

23. Osztás! $I=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln C(2x^2-x+1)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}$.

ζ

2. $I=-\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{1}{3}\frac{2x-3}{x^2-3x+3}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C$.

3. $I=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{12}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4. $I=\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\text{ arc tg }\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$

5. $I=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+2x+10)^2}+\frac{1}{648}\left[\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\text{ arc tg }\frac{x+1}{3}\right]+C.$

6. $I=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{1}{6}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\text{ arc tg }\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

7. $I=-\frac{1}{4x^2-12x+34}-2\left[\frac{1}{50}\frac{2x-3}{4x^2-12x+34}+\frac{1}{250}\text{ arc tg }\frac{2x-3}{5}\right]+C.$

8. $I=\frac{1}{32}\int\frac{7(32x-24)+264}{(16x^2-24x+13)^2}dx=-\frac{7}{32}\frac{1}{16x^2-24x+13}+\frac{33}{16}\left[\frac{1}{8}\frac{4x-3}{16x^2-24x+13}+\right.$
$\left.+\frac{1}{16}\text{ arc tg}\frac{4x-3}{2}\right]+C.$

9. $I=+\frac{9}{16}\frac{1}{(4x^2-12x+10)^2}-\frac{17}{4}\left[\frac{1}{4}\frac{2x-3}{(4x^2-12x+10)^2}+\frac{3}{8}\frac{2x-3}{4x^2-12x+10}+\right.$
$\left.+\frac{3}{8}\text{ arc tg }(2x-3)\right]+C.$

c)

γ, δ, ε | γ_1), δ_1), ε) 4. $I=\frac{1}{6}\ln C\frac{x-5}{x+1}.$

5. $I=\frac{1}{6}\ln C\frac{x-2}{x+4}.$

6. $I=\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{5}{2}\ln(x+3)+C.$

7. $I=\ln C\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}.$

8. $I=\frac{1}{5}\ln C(x-2)^2\sqrt{2x+1}.$

9. $I=\ln\frac{C}{2x^2-3x+1}.$

10. $I=\frac{1}{3}\ln C\frac{(x-1)^2(x+2)^{10}}{(x+1)^3}.$

11. $I=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln C(x+1).$

12. $I=\ln C\frac{(x-1)(x-4)^5}{(x+3)^7}.$

13. $I=\frac{3}{11}\ln(3x+1)+\frac{2}{33}\ln(2x-3)-\frac{1}{3}\ln x+C.$

14. $I=\frac{1}{2}\ln C\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x-3)^3}.$

15. $I=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}-\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln C\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}.$

16. $I=x+\frac{1}{6}\ln x-\frac{9}{2}(x-2)+\frac{28}{3}\ln(x-3)+C.$

17. $I=\frac{1}{4}x+\ln x-\frac{7}{16}\ln(2x-1)-\frac{9}{16}\ln(2x+1)+C.$

18. $I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}+4x+\ln C\,\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}.$

19. $I=\ln(2x-1)-6\ln(2x-3)+5\ln(2x-5)+C.$

20. $I=\ln C\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}.$

21. $I=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{2}}+C.$

22. $I=\ln\frac{C}{\sqrt[3]{1+3x^3-x^6}}.$

23. $I=\frac{x^2}{2}+\ln C\,\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}.$

γ_2), δ_4), ε) 3. $I=-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+C.$

4. $I=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln C(x^2-1).$

5. $I=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3x-1}+C.$ 6. $I=-\frac{5}{4}\,\frac{1}{4x-5}+C.$

7. $I=-\frac{5}{4}\,\frac{1}{2x+1}+\frac{7}{8}\,\frac{1}{(2x+1)^2}+C.$

8. $I=\ln C\,\frac{x^2}{x+1}+\frac{6}{x+1}+C.$

9. $I=x+\frac{1}{x}+\ln C\,\frac{(x-1)^2}{x}.$

10. $I=-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln C(x-2).$

11. $I=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln C\,\frac{x-1}{x+1}.$

12. $I=2\ln C\,\frac{x+4}{x+2}-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}.$

13. $I=\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln C(x-5).$

14. $I=\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln(x-1)+\frac{1}{8}\ln(x+1)+C.$

15. $I=\frac{1}{4}\ln\frac{Cx}{x-2}-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}$.

16. $I=-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$. 17. $I=\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}+C$; $x=\sin u$ helyettesítéssel!

γ_3), δ_1), ε) 3. $I=\ln C\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. $I=\frac{5}{13}\ln(x-2)+\frac{4}{13}\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{13}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}+C$.

5. $I=\ln C\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}$.

6. $I=\frac{1}{4}\ln C\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.

7. $I=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$.

8. $I=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln C(x^2+2x+2)-2\operatorname{arc\,tg}(x+1)$.

9. $I=-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\ln x+\frac{5}{4}\ln(x^2+x+2)-\frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$.

10. $I=\frac{2}{3\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x+2)+C$.

12. $I=\frac{1}{6}\ln C\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

13. $I=\frac{\sqrt{3}}{12}\ln C\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} x^3$.

14. $I=\frac{1}{6}\ln C\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

15. $I=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2-\frac{1}{4}\ln C(x^4+1)$.

γ_4), δ_1), ε) 2. $I=\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln C(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

3. $I=\ln C(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg} x\right)$.

4. $I=\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}+C$.

5. $I=\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C$.

6. $I=\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln C\sqrt{x^2+1}.$

7. $I=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\ln Cx(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

8. $I=\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arc\,tg} x+C.$

9. $I=\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln C\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).$

11. $I=-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$

γ_5) 1. $I=\ln C\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}.$ 2. $I=\ln C\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)}.$

3. $I=\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{5}{3}\ln(x+3)+\frac{5}{6}\ln(x-3)+C.$

4. $I=5\ln(x-2)+4\ln(x^2+2x+5)-\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}+C.$

5. $I=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln C\frac{x-1}{x+2}.$ 6. $I=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{5}{6}\ln C\frac{x^2+1}{x^2+4}.$

7. $I=-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln C\frac{x-1}{x-2}.$

8. $I=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{4}\ln C\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$

9. $I=-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arc\,tg}(x-2)+C.$

10. $I=\frac{1}{4}\ln C\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$ 11. $I=\ln C\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$

12. $I=\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{2}\ln C(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$

13. $I=\ln C\frac{(x^3-1)^2}{x+1}-4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

14. $I=\frac{1}{4}\ln C\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}.$

15. $I=\frac{2}{5}\ln C\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg}(x+1)-\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(2x+1).$

16. $I=\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$

17. $I=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln C\frac{x+1}{x-1}.$

18. $I=\ln Cx(x-1)+\frac{2}{x-1}.$

19. $I=\ln C\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}+\frac{x-1}{x^2+1}.$

20. $I=-\frac{x+9}{8(x^2+2x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}+C.$

21. $I=2\ln C\frac{x-2}{x}-\frac{1}{x-2}.$

22. $I=\frac{1}{24}\ln C\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$

23. $I=\frac{1}{24}\ln C\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$

24. $I=\frac{1}{16}\ln C\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{2-x^2}.$

25. $I=3\ln C\frac{x-1}{x-2}-\frac{2}{x-2}.$

26. $I=\ln C\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}+2\operatorname{arc\,tg}(x-1).$

27. $I=-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)\right]+C.$

γ), δ_2), ε) 2. $I=\ln C\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}.$

3. $I=\frac{1}{2}\ln C\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x-3)^3}.$

4. $I=\ln C\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}.$

5. $I=\ln C\frac{(2x-1)(2x-5)^5}{(2x-3)^6}.$

6. $I=\ln C\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}.$

7. $I=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+C.$

γ), δ_3), ε) 2. $I=-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+C.$

3. $I=-\frac{5}{4}\,\frac{1}{2x+1}+\frac{7}{8}\,\frac{1}{(2x+1)^2}+C.$

4. $I=-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln C(x-2).$

5. $I=a\ln C(x+a)+\frac{2a^2}{x+a}-\frac{a^3}{2(x+a)^2}.$

γ), δ_4), ε) 2. $\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$; $A=1,\quad B=-1,\quad C=0$;

$I=\ln C\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. 3. $I=\ln C\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}$.

4. $I=\ln C\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

5. $$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln C\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}}+\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)\right].$$

d)

4. $I=\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$

5. $I=\frac{3x^3-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln C\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg}x.$

6. $I=-\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}-6\ln C\frac{x-1}{x}$.

7. $I=\frac{1}{648}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+C.$

8. $Q_2(x)=(x+1)(x^2+x+1),\quad Q_1(x)=(x+1)(x^2+x+1)^2$;

$I'=\left[\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\right]'+\frac{fx^2+gx+h}{(x+1)(x^2+x+1)}$; $a=-1,\quad b=0,\quad c=-2,$

$d=0,\quad e=-1,\quad f=g=h=0;\quad I=-\frac{x^4+2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)^2}+C.$

9. $I=-\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}-\operatorname{arc\,tg}(x+2)+C.$

10. $I=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln C\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

5. §. Irracionális függvények integrálása

a)

α–β 4. $I=\frac{3}{7}\sqrt[3]{7x+4}+C.$ 5. $I=-\frac{2}{5\sqrt{5x-1}}+C.$

6. $I=\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x}+C.$ 7. $I=2$ 8. $I=\frac{16}{3}.$

9. $I=\frac{a^2}{6}.$ 10. $I=\frac{122}{9}.$ 11. $I=\frac{4}{65}.$

γ 3. $I=\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

4. $I=\frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{3}{5}}+C.$

5. $I=\frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2}+C.$

6. $I=\frac{2x-1}{4}\sqrt{10-4x+4x^2}+\frac{9}{4}\ln C(2x-1+\sqrt{10-4x+4x^2}).$

7. $I=\frac{9}{2}\ln 3+10.$ 8. $I=ab\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right).$

9. $I=\int\limits_{-3}^{4}\sqrt{25-x^2}\,dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}\right]_{-3}^{4}=31{,}6.$

10. $I=\left(-\frac{a^4x}{16}-\frac{a^2x^3}{24}+\frac{x^5}{6}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C.$

11. $I=\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln C(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}).$

δ 3. $I=\arcsin(2x-1)+C.$

4. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4^2-(x-1)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{4}+C.$

5. $I=\operatorname{ar\,sh}\dfrac{x-3}{\sqrt{3}}+C_1=\ln C_2\left(x-3+\sqrt{11-6x+x^2}\right).$

6. $I=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{3x+2}{\sqrt{19}}+C.$ 7. $I=\left[\arcsin\dfrac{2x-a}{a}\right]_0^a=\pi.$

8. $I=\dfrac{6}{\sqrt{7}}\arcsin\dfrac{7x+4}{\sqrt{79}}+C.$ 9. $x=5\sin u,\quad I=\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{3}{2}.$

ε

3. $I=-\sqrt{27+6x-x^2}+3\arcsin\dfrac{x-3}{6}+C.$

4. $I=\dfrac{2}{3}\sqrt{9x^2+1}+\dfrac{5}{3}\ln C\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right).$

5. $I=3\sqrt{x^2-5x+19}+\dfrac{19}{2}\ln C\left(x-\dfrac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+19}\right).$

6. $I=\dfrac{3}{4}\sqrt{4x^2-4x+5}-\dfrac{1}{4}\ln C\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right).$

b)

α

3. $x=t^8,\quad I=\dfrac{8}{3}x^{\frac{3}{8}}+2\ln C\dfrac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+4\operatorname{arc\,tg}x^{\frac{1}{8}}.$

4. $x=t^4,\quad I=\dfrac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}}-\ln C\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)\right].$

5. $x=t^2,\quad I=4-2\ln 3.$

6. $I=\dfrac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{6}}+\ln C\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+1}{x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1}-2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{3}}.$

7. $I=\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}+\dfrac{3}{2}\ln C\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right)^6}+3\operatorname{arc\,tg}x^{\frac{1}{6}}.$

β

3. $I=\dfrac{20x+32}{45}(x-2)\cdot\sqrt[4]{x-2}+C.$

4. $I=\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^8}+\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{(2x-3)^5}\right]+C.$

5. $I=\dfrac{6x-9a}{10}\cdot\sqrt[3]{(x+a)^2}+C.$

6. $I=\dfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln C\left[1+(x+1)^{\frac{1}{3}}\right].$

7. $I=\frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}+C.$

8. $I=2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$

9. $I=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln C\left[1+(x+1)^{\frac{1}{3}}\right].$

10. $I=x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln C[-1+\sqrt{x+1}].$

$\gamma-\delta$ | 3. $I=3\left[\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[6]{2x-1}+\ln C\left(\sqrt[6]{2x-1}-1\right)\right].$

4. $I=\frac{2}{9}\,\frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}}+C.$

5. $I=6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}+\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}+\right.$

$\left.+\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+C.$

6. $I=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C.$ 7. $I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

8. $I=\frac{16t^5-10t^2}{3(t^3-1)^2}+\frac{10}{9}\ln C\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{20}{3\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, ahol $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$

9. $I=4\sqrt{\sqrt{x+2}-1}-2\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}}+C.$

ε | 2. $I=\frac{1}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}+(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]+C.$

3. $I=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$ 4. $I=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}.$

5. $I=\sqrt{x(x-1)}+\ln C(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}).$

6. $I=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+2)^3}-\sqrt{(x+1)^3}\right]+C.$

ζ | 1. $I=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln C\,(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})-$

$-\sqrt{2}\ln\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x-2)}}{x}.$

2. $I=-\frac{3-2x}{4}-\frac{1}{8}\ln C\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right).$

3. $I=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln C\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}.$

4. $I=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$

5. $I=\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}}+\ln C\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}.$

6. $I=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}+C.$

7. $I=\frac{1}{6}\ln C\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}.$

8. $I=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln C\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}.$

9. $I=-\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.$

c)

α

2. $I=\frac{1}{12}\ln C\frac{x^3}{x^3+4}.$

3. $I=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x^4+C.$

4. $I=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^2+C.$

5. $I=\frac{1}{12}\ln C\frac{x^6-1}{x^6+1}.$

β

2. $I=\frac{1}{10}\ln C\frac{(u-1)^2}{u^2+u+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C,$ ahol $u=\sqrt[3]{1+x^5}.$

3. $I=\frac{1}{b^2}\,\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}+C.$

4 $I=\frac{(3x^2-2)(1+x^2)^{3/2}}{15}+C.$

5. $I=\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C.$

6. $I=\frac{1}{70}(5t^2-1)\cdot(1+2t^2)^{\frac{5}{2}}+C.$

7. $I=\frac{1}{7}(x^2-1)^{\frac{7}{2}}+\frac{3}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{2}}+(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+C.$

γ

3. $I=\frac{1}{6}\ln C\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}},$ ahol $u^3=x^{-3}+1.$

4. $I=\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{12}\ln C\frac{u^2+2u+1}{u^2-u+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}.$ ahol $u^3=x^{-2}+1.$

5. $I=\frac{1}{3}\ln C\left(x^3+\sqrt{x^6-1}\right)\cdot$

6. $I=-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2x+\frac{1}{x}\right)+C.$

7. $$I=-\frac{3x^3+2a}{2a^2x(a+x^3)^{2/3}}+C.$$

8. $$I=\frac{u^5}{5}-\frac{2u^3}{3}+u, \quad \text{ahol} \quad u^2=1-x^{-2}.$$

9. $$I=\frac{1}{4}\ln C\frac{u-1}{u+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u, \quad \text{ahol} \quad u^4=2+x^{-4}.$$

δ

3. $$H_8=\left(\frac{x^7}{8}+\frac{7x^5}{48}+\frac{35x^3}{192}+\frac{35x}{128}\right)\cdot\sqrt{x^2-1}+\frac{35}{128}\operatorname{ar\,ch} x+C.$$

4. $$I=\frac{x}{5(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}+\frac{4x}{15(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{8x^3}{15(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+C.$$

6. §. Trigonometrikus, exponenciális, hiperbolikus függvények és inverzeik integrálása

a)

α – β

3. $I=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

4. $I=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$

5. $I=\frac{1}{16}\left(5\varphi+4\sin 2\varphi-\frac{1}{3}\sin^3 2\varphi+\frac{3}{4}\sin 4\varphi\right)+C.$

6. $I=\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t+C.$

γ

3. $C_{-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+C.$

4. $S_{-3}=\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]+C.$

5. $$-\frac{1}{(1-u^2)^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{(1-u)^2}+\frac{C}{1+u}+\frac{D}{(1+u)^2},\quad A=B=C=D=-\frac{1}{4}.$$

$$S_{-3}=\frac{1}{2}\left[\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]+C.$$

δ

2. $I=-\int\frac{t^4-2t^2+1}{t^4}\,dt=-t-\frac{2}{t}+\frac{1}{3t^3}+C=$

$=-\cos x-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C.$

6. $I=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{4}\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}\right]=$

$=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$

7. $I=-\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx=-\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\cos^3 x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx\right)=$

$=-\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\cos^3 x-\frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos x+C=$

$=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos x+C.$

8. $I=\frac{7}{24}\sin^{\frac{10}{7}}x\cdot\cos^2 x+\frac{7}{12}\int\sin^{\frac{3}{7}}x\cdot\cos x\,dx=\frac{7}{24}\sin^{\frac{10}{7}}x-\frac{7}{24}\sin^{\frac{24}{7}}x+$

$+\frac{49}{120}\sin^{\frac{10}{7}}x+C=\frac{7}{10}\sin^{\frac{10}{7}}x-\frac{7}{24}\sin^{\frac{24}{7}}x+C.$

9. $I=-2\sqrt{\cos x}\cdot\left(1-\frac{2}{5}\cos^2 x+\frac{1}{9}\cos^4 x\right)+C.$

10. $I=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$

11. $I=\frac{3}{2}\sin^{2/3}x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{7}\sin^4 x\right)+C.$

12. $I=\frac{1}{128}\left(5x+\frac{8}{3}\sin^3 2x-\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C.$

13. $I=\frac{1}{3}\cdot$

14. $I=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

15. $I=\frac{1}{128}\left(3t-\sin 4t+\frac{1}{8}\sin 8t\right)+C.$

ε

4. $I=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x+C.$

5. $I=-\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}+3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+x+C.$

6. $I=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x+C.$

7. $I=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C.$

8. $I=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+\ln\operatorname{tg}x+C.$

ζ

8. $I=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

9. $I=\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+2\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

10. $I=x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$ 11. $I=\frac{\ln 3}{4}.$

12. $I=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$ 13. $I=\frac{1}{3}\ln C\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}.$

14. $I=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5\operatorname{tg}x+4}{3}\right)+C.$ 15. $I=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(3\operatorname{tg}x)+C.$

17. $I=\int\frac{t^2\,dt}{(1+t)(1+t^2)^2}=\int\left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\,\frac{t-1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\,\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right]dt=$

$=\frac{1}{4}\ln C(\sin x+\cos x)-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x).$

21. $I=\int\frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)}=\int\left[\frac{A}{a+bt}+\frac{Bt+C}{1+t^2}\right]dt,$ ahol $A=\frac{b^2}{a^2+b^2},$

$B=-\frac{b}{a^2+b^2},\quad C=\frac{a}{a^2+b^2}.$ Végül $I=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln K(a\cos x+b\sin x)].$

η | 2. $I=-\frac{1}{22}\sin 11\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi+C.$ 3. $I=\frac{1}{22}\sin 11s+\frac{1}{6}\sin 3s+C.$

4. $I=-\frac{1}{2}\cos x+\cos\frac{1}{2}x+C.$

ϑ | 3. $I=\ln C(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}.$

4. $I=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$

5. $I=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2\cdot x}+C.$ 6. $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

7. $I=\frac{1}{x}\ln C\frac{r-\sqrt{r^2-x^2}}{x}$ 8. $I=\frac{a^4\pi}{16}.$ 9. $I=4\pi.$

ι | 2. $I=-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

3. $I=-\frac{e^{-\varphi}}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)+C.$

4. $I=\frac{e^{2t}}{13}(3\sin 3t+2\cos 3t)+C.$ 8. $u=\ln x,$ $I=\int e^u\cdot\cos u\,du.$

6. $I=\sqrt{2}\int x^2\cdot\sin 2x\,dx;$ tovább, mint a 2. példa.

7. $I=0{,}429\ldots$ 5. $I=-e^{-x}\cdot(x^2+2x+2)+C.$

ϰ | 2. $I=\frac{1}{4}(x^4-1)\,\mathrm{arc\,tg}\,x+\frac{1}{12}(3x-x^3)+C.$

3. $u=\mathrm{arc\,tg}\,x,\quad v'=\frac{1}{x^2};\quad I=\ln C\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{x}.$

4. Először $u=\ln(1-\sqrt{x}),\quad v'=1;$ majd $t=\sqrt{x}$ helyettesítés;

$I=(x-1)\ln(1+\sqrt{x})+\frac{1}{2}(x+2\sqrt{x})+C.$

5. Először $u=\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x},\quad v'=\frac{1}{x^2},$ majd $t=\sqrt{x}$ helyettesítés!

b)

α | 3. $I=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\ln C(e^x-2).$

2. $\int\frac{du}{u^2+1}=\mathrm{arc\,tg}\,e^x+C.$ 4. $I=\mathrm{arc\,tg}\,e-\frac{\pi}{4}.$

5. Osztás; $I=-\varphi+2\ln C(ae^{\varphi}-b).$ 6. $I=e^s-\ln C(e^s+1).$

β | 3. $I=(x-1)e^x+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x+C.$

4. $I=-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{3}e^{-x})+C.$

5. $I=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\mathrm{ch}^2\,t}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$

γ | 2. $$I=\int\frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\left(1+\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t}\,dt=\frac{1}{2}\left(\ln t-\frac{t^2}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\mathrm{th}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{th}^2\,\frac{x}{2}+C.$$

4. $I=\int\frac{(1-t^2)^2}{t^4}\,dt=\mathrm{th}\,x+2\,\mathrm{cth}\,x-\frac{1}{3}\mathrm{cth}^3\,x+C.$

6. $I=\mathrm{sh}^3\,\varphi\cdot\mathrm{ch}\,\varphi-3\int\mathrm{sh}^2\,\varphi\,\mathrm{ch}^2\,\varphi=\mathrm{sh}^3\,\varphi\,\mathrm{ch}\,\varphi-3\int\mathrm{sh}^2\,\varphi\,d\varphi-3\int\mathrm{sh}^4\,\varphi\,d\varphi.$

Rendezve: $I=\frac{1}{4}\,\text{sh}^3\,\varphi\,\text{ch}\,\varphi-\frac{3}{16}\,\text{sh}\,2\varphi+\frac{3}{8}\,\varphi+C.$

9. $I=\frac{1}{2}\,\text{ch}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\,\text{cth}^3\,\frac{x}{2}+C.$

10. $t=\text{th}\,x$ helyettesítés; $I=\frac{3}{8\sqrt{2}}\ln C\,\frac{\sqrt{2}+\text{th}\,x}{\sqrt{2}-\text{th}\,x}-\frac{\text{th}\,x}{4(2-\text{th}^2\,x)}.$

11. $t=\text{sh}\,x$ helyettesítés; $I=\text{sh}\,x+\frac{2}{3}\,\text{sh}^3\,x+\frac{1}{5}\,(\text{sh}^5\,x+\text{ch}^5\,x)+C.$

12. $t=\text{th}\,x$ helyettesítés; $I=\frac{1}{2}\,\text{th}\,x+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln C\,\frac{1-\sqrt{2}\,\text{th}\,x}{1+\sqrt{2}\,\text{th}\,x}.$

13. $t=\text{th}\,x$ helyettesítés; $I=\ln\text{ch}\,x-\frac{1}{2}\,\text{th}^2\,x+C.$

δ

3. $I=2e^{\sqrt{x}}+C.$

4. $I=\frac{10^x}{\ln 10}+C.$

5. $I=\int e^{\frac{t}{2}}\,dt=2\sqrt{e^t}+C.$

6. $I=\int e^{x(1+\ln a)}\,dx=\frac{a^x\cdot e^x}{1+\ln a}+C.$

7. $u=1+\ln x,\quad du=\frac{dx}{x};\quad I=\frac{2}{3}\,(1+\ln x)^{3/2}+C.$

8. $u=e^x+1;\quad I=\frac{4}{21}\,(3e^x-4)(e^x+1)^{3/4}+C.$

9. $u^2=e^x-1;\quad I=\frac{4-\pi}{2}.$

10. $u^2=e^x-1;\quad I=4-\pi.$

11. $I=\frac{1}{2}\,(e^{\pi}+1).$

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

1. *Г. М. Фихтенгольц:* Курс дифференциалного и интегрального исчисления, том II; Огиз—Гостехиздат, 1948, Москва.

2. *Г. Н. Берман:* Сборник задач по курсу математического анализа, изд. 3. Гостехиздат, 1952, Москва.

3. *H. M. Gjunter—R. O. Kuzmin:* Felsőbb matematikai példatár, II. rész: fordítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

4. *A. F. Bermant:* Matematikai analízis, I. rész; fordítás; Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

5. *Н. Н. Лузин:* Интегральное исчисление, изд. 3.; Советская наука, 1952, Москва.

6. *Б. П. Демидович:* Сборник задач и упражнений по математическому анализу Гостехиздат, 1952, Москва.

7. *А. И. Погорелов:* Сборник задач по высшей математике; Учпедгиз, 1951, Москва.

8. *Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei I—II., 2. kiadás; Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951.

9. *Stachó Tibor:* Felsőbb mennyiségtan, 2. kiadás; Budapest, 1942.

10. *A. Ostrowsky:* Vorlesung über Infinitesimalrechnung I—II. kt. Birkhäuser, Basel, 1945.

11. *W. A. Granville—P. F. Smith—W. R. Longley:* Elements of the Differential and Integral Calculs. Rev. ed. Ginn and Comp., Boston, 1941.

12. *M. Lindow:* Integralrechnung, B. G. Teubner, Leipzig, 1951.

13. *R. Rothe:* Höhere Mathematik, I., IV/1—2.; B. G. Teubner, Leipzig, 1949.

14. *И. М. Рыжик: — И. С. Градшейн:* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений; изд. 3.; Гостехиздат, 1951, Москва.

Tankönyvkiadó Vállalat — A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató — Újranyomásra előkészítette: Ambrus Ferenc — Műszaki vezető: Hámori József — Műszaki szerkesztő: Bánfi Ferenc — A kézirat nyomdába érkezett: 1967. november — Megjelent: 1968. április — Példányszám: 3500. Terjedelem: 18,25 (A/5) ív — Készült: új monószedésről, íves magasnyomással, az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint.
Raktári szám: 44131/IV.
67.1699. Egyetemi Nyomda, Budapest.